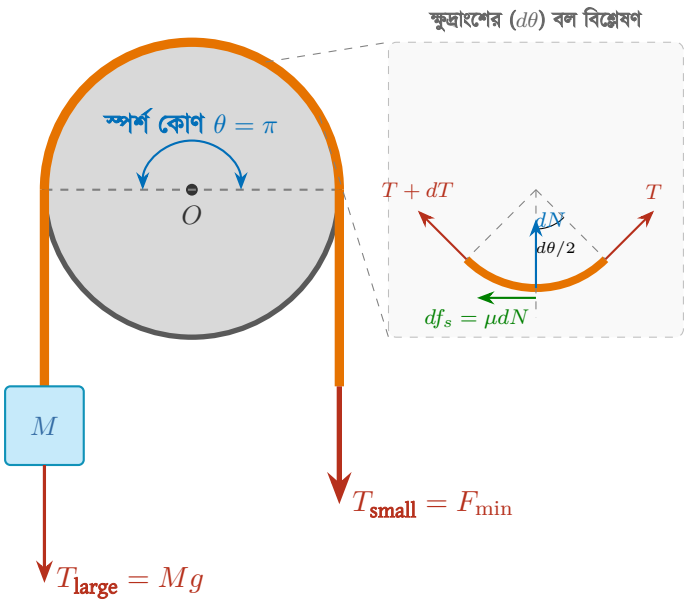
প্রশ্ন (Question) 1

একটি স্থির অমসৃণ অনুভূমিক নলাকার কপিকল বা পাইপের ওপর দিয়ে একটি অপ্রসারণশীল দড়ি পেঁচানো আছে যার স্পর্শ কোণ (angle of contact বা wrap angle) $\theta = \pi$ rad (অর্ধবৃত্তাকার স্পর্শ)। দড়ি ও সিলিন্ডারের মধ্যকার স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu = \frac{\ln(3)}{\pi} \approx 0.35$। দড়ির এক প্রান্তে $M = 30$ kg ভরের একটি বস্তু ঝুলছে। অপর মুক্ত প্রান্তে হাত দিয়ে ধরে বস্তুটিকে নিচে পড়ে যাওয়া থেকে ঠিক ধরে রাখতে ন্যূনতম কত বল F_{min} প্রয়োগ করতে হবে? ($g = 9.8$ ms^{-2})

A flexible light rope wraps around a fixed rough horizontal circular cylinder with a contact angle of $\theta = \pi$ rad (semicircular contact). The static friction coefficient between the rope and the cylinder is $\mu = \frac{\ln(3)}{\pi} \approx 0.35$. A load of $M = 30$ kg is suspended from one end. What minimum holding force F_{min} must be applied to the other end to prevent the load from slipping downwards? ($g = 9.8$ ms^{-2})



সমাধান (Solution)

এই সমস্যাটি মৌলিক বলবিদ্যা ও ক্যালকুলাস ব্যবহার করে সমাধান করা যায়:

১. মৌলিক বল বিশ্লেষণ: ভারী বস্তুটি তার ওজনের কারণে নিচের দিকে পিছলে পড়ার চেষ্টা করে। ফলে দড়ির গতির উপক্রম হয় ভারী বস্তুর দিকে। সিলিন্ডারের পৃষ্ঠের স্থিতি ঘর্ষণ বল এই গতিকে বাধা দেয়, অর্থাৎ এটি হাতের দিকের অংশের সহায়তায় কাজ করে। এর ফলে বস্তুর দিকের টানটি হবে বৃহত্তর (T_{large}) এবং হাত দিয়ে প্রযুক্ত বল হবে ক্ষুদ্রতর (T_{small})।

$$T_{\text{large}} = Mg = 30 \times 9.8 = 294 \text{ N}$$

$$T_{\text{small}} = F_{\min}$$

২. দড়ির অতি ক্ষুদ্র অংশের (Infinitesimal Element) বল বিশ্লেষণ: ধরি, নলের গায়ে পেঁচানো দড়ির একটি অতিক্ষুদ্র অংশ যা নলের কেন্দ্রে $d\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এই অংশের এক প্রান্তে টান T এবং অপর প্রান্তে টান $(T + dT)$। ক্ষুদ্র অংশটির ওপর নলের পৃষ্ঠ কর্তৃক প্রযুক্ত লম্ব প্রতিক্রিয়া বল dN এবং ঘর্ষণ বল $df_s = \mu dN$।

- **ব্যাসার্ধ বরাবর সাম্যাবস্থা (Radial Equilibrium):** টান বল দুটির কেন্দ্রমুখী উপাংশ অভিলম্ব বল dN-কে প্রশমিত করে। $d\theta$ অতি ক্ষুদ্র হওয়ায় জ্যামিতিক নিয়মে $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$:

$$dN = T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (T + dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx T\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T\left(\frac{d\theta}{2}\right) = Td\theta$$

  (এখানে $dT \cdot d\theta$ অংশটি দ্বিতীয় মাত্রার ক্ষুদ্রাংশ বিধায় তা অগ্রাহ্য করা হয়েছে)।

- **স্পর্শক বরাবর সাম্যাবস্থা (Tangential Equilibrium):** বৃহত্তর টানকে ক্ষুদ্রতর টান ও ঘর্ষণ বল মিলে প্রশমিত করে:

$$(T + dT) = T + df_s \implies dT = df_s$$

  যেহেতু $df_s = \mu dN$, আমরা উপরের dN এর মান বসিয়ে পাই:

$$dT = \mu(Td\theta) \implies \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

৩. সমাকলন (Integration): পুরো স্পর্শ কোণ θ জুড়ে সীমার মধ্যে (টান T_{small} থেকে T_{large} এবং কোণ 0 থেকে θ পর্যন্ত) সমাকলন করে মোট টানের সম্পর্ক পাই:

$$\int_{T_{\text{small}}}^{T_{\text{large}}} \frac{1}{T} dT = \int_0^{\theta} \mu d\theta$$

$$[\ln T]_{T_{\text{small}}}^{T_{\text{large}}} = \mu\theta \implies \ln\left(\frac{T_{\text{large}}}{T_{\text{small}}}\right) = \mu\theta$$

$$T_{\text{large}} = T_{\text{small}} e^{\mu\theta}$$

৪. ন্যূনতম বল ($F_{\min}$) নির্ণয়: প্রদত্ত মানসমূহ: ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu = \frac{\ln(3)}{\pi}$ এবং মোট স্পর্শ কোণ $\theta = \pi$ rad। সূচকের ঘাত নির্ণয় করি:

$$\mu\theta = \left(\frac{\ln 3}{\pi}\right) \times \pi = \ln(3)$$

সুতরাং, ঘর্ষণ গুণকটি হবে:

$$e^{\mu\theta} = e^{\ln(3)} = 3$$

প্রাপ্ত সমীকরণে মান বসালে:

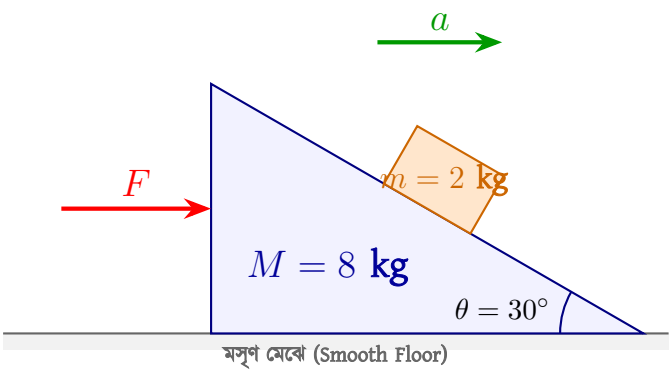
$$294 = F_{\text{min}} \times 3 \implies F_{\text{min}} = \frac{294}{3} = 98.0 \text{ N}$$

অতএব, বস্তুটিকে পড়ে যাওয়া থেকে ঠিক ধরে রাখতে ন্যূনতম 98.0 N বল প্রয়োগ করতে হবে।

প্রশ্ন (Question) 2

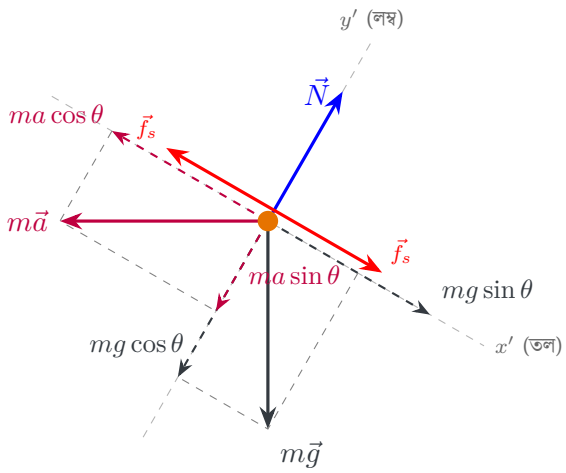
8 kg ভরের একটি মসৃণ প্রিজম্যাটিক ওয়েজ (Wedge) একটি মসৃণ অনুভূমিক মেঝের উপর অবস্থিত। ওয়েজটির আনত তলের কোণ $\theta = 30°$। এই অমসরূণ আনত তলের উপর 2 kg ভরের একটি ব্লক রাখা আছে। ব্লক এবং আনত তলের মধ্যবর্তী স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_s = 0.2$। ওয়েজটির খাড়া পৃষ্ঠে অনুভূমিকভাবে একটি বল F প্রয়োগ করা হলো। বলের সীমার অনুসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা (Range of F) নির্ণয় করো যেন ব্লকটি ওয়েজের সাপেক্ষে পিছলে না গিয়ে স্থির থাকে। [$g = 9.8$ m/s^2]

A smooth prismatic wedge of mass 8 kg is placed on a smooth horizontal floor. The angle of inclination of the wedge is $\theta = 30°$. A block of mass 2 kg is placed on the rough inclined surface of the wedge. The coefficient of static friction between the block and the inclined surface is $\mu_s = 0.2$. A horizontal force F is applied to the vertical face of the wedge. Determine the range of the force F so that the block remains stationary relative to the wedge. [$g = 9.8$ m/s^2]



মুক্ত বস্তু চিত্র (FBD of m)

অ-জড়তা কাঠামো (Non-inertial Frame)



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: অ-জড়তা কাঠামো (Non-inertial Frame) এবং বল বিভাজন

যেহেতু বাহ্যিক বল F-এর কারণে পুরো সিস্টেমটি ডানদিকে a ত্বরণে গতিশীল, তাই হিসাবের সুবিধার্থে আমরা ওয়েজের কাঠামোতে ব্লকের গতি বিশ্লেষণ করব। ওয়েজের ত্বরিত কাঠামোতে থাকার কারণে ব্লকের ওপর বামদিকে একটি ছদ্ম বল (Pseudo-force) ক্রিয়া করবে, যার মান: $f_p = ma$।
আনত তলের সমান্তরাল এবং লম্ব বরাবর বলগুলোকে বিভাজন (Resolve) করি:

- **ওজনের (mg) উপাংশ:**
  - আনত তলের সমান্তরালে নিচের দিকে: $mg\sin\theta$
  - আনত তলের লম্ব বরাবর নিচের দিকে: $mg\cos\theta$
- **ছদ্ম বলের (ma) উপাংশ:**
  - আনত তলের সমান্তরালে উপরের দিকে: $ma\cos\theta$
  - আনত তলের লম্ব বরাবর নিচের দিকে (তলকে চাপ দেয়): $ma\sin\theta$

ধাপ ২: অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া এবং সীমাস্থ ঘর্ষণ

আনত তলের লম্ব বরাবর ব্লকটি সাম্যাবস্থায় থাকায় অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল (N) হবে:

$$N = mg\cos\theta + ma\sin\theta$$

ব্লকটি স্থির থাকার জন্য যেকোনো মুহূর্তে সর্বোচ্চ সীমাস্থ স্থিতি ঘর্ষণ বলের মান হবে:

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s N = \mu_s(mg\cos\theta + ma\sin\theta)$$

ধাপ ৩: কেস ১ - সর্বনিম্ন বল F_{min} (নিচের দিকে পিছলে পড়ার সীমান্ত)

যখন প্রযুক্ত বল F খুবই কম হয়, তখন ত্বরণ a কম থাকে। ফলে ছদ্ম বলের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ ($ma\cos\theta$) ওজনের নিম্নমুখী উপাংশ ($mg\sin\theta$)-কে আটকাতে পারে না এবং ব্লকটি নিচের দিকে পিছলে যাওয়ার উপক্রম হয়। তখন ঘর্ষণ বল f_s আনত তলের সমান্তরালে **উপরের দিকে** কাজ করে। সাম্যাবস্থার সমীকরণ:

$$mg\sin\theta = ma_{\text{min}}\cos\theta + f_{s,\text{max}}$$
$$mg\sin\theta = ma_{\text{min}}\cos\theta + \mu_s(mg\cos\theta + ma_{\text{min}}\sin\theta)$$

উভয়পক্ষ থেকে ভর m বাদ দিয়ে সমীকরণটি সাজালে:

$$g\sin\theta - \mu_s g\cos\theta = a_{\text{min}}\cos\theta + \mu_s a_{\text{min}}\sin\theta$$
$$g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) = a_{\text{min}}(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)$$
$$\implies a_{\text{min}} = g\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}$$

মানগুলো বসাই ($\sin 30^\circ = 0.5$, $\cos 30^\circ \approx 0.866$, $\mu_s = 0.2$):

$$a_{\text{min}} = 9.8 \times \frac{0.5 - (0.2 \times 0.866)}{0.866 + (0.2 \times 0.5)} = 9.8 \times \frac{0.5 - 0.1732}{0.866 + 0.1} = 9.8 \times \frac{0.3268}{0.966} \approx 3.315 \text{ m/s}^2$$

যেহেতু ব্লকটি স্থির, পুরো সিস্টেম একত্রে চলে। অতএব সর্বনিম্ন বল:

$$F_{\text{min}} = (M + m)a_{\text{min}} = (8 + 2) \times 3.315 = 10 \times 3.315 = \mathbf{33.15} \text{ N}$$

ধাপ ৪: কেস ২ - সর্বোচ্চ বল F_{max} (উপরের দিকে পিছলে ওঠার সীমান্ত)

যখন প্রযুক্ত বল F অনেক বেশি হয়, তখন ছদ্ম বলের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ ওজনের নিম্নমুখী উপাংশকে ছাড়িয়ে যায়। ফলে ব্লকটি আনত তল বেয়ে উপরের দিকে ওঠার উপক্রম হয়। তখন ঘর্ষণ বল f_s আনত তলের সমান্তরালে **নিচের দিকে** কাজ করে। সাম্যাবস্থার সমীকরণ:

$$\begin{aligned} ma_{\text{max}} \cos\theta &= mg \sin\theta + f_{s,\text{max}} \\ ma_{\text{max}} \cos\theta &= mg \sin\theta + \mu_s(mg \cos\theta + ma_{\text{max}} \sin\theta) \end{aligned}$$

একইভাবে, m বাদ দিয়ে সমীকরণ সাজালে:

$$\begin{aligned} a_{\text{max}} \cos\theta - \mu_s a_{\text{max}} \sin\theta &= g \sin\theta + \mu_s g \cos\theta \\ a_{\text{max}}(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) &= g(\sin\theta + \mu_s \cos\theta) \\ \implies a_{\text{max}} &= g\frac{\sin\theta + \mu_s \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} \end{aligned}$$

মানগুলো বসিয়ে পাই:

$$a_{\text{max}} = 9.8 \times \frac{0.5 + (0.2 \times 0.866)}{0.866 - (0.2 \times 0.5)} = 9.8 \times \frac{0.5 + 0.1732}{0.866 - 0.1} = 9.8 \times \frac{0.6732}{0.766} \approx 8.613 \text{ m/s}^2$$

অতএব সর্বোচ্চ বল:

$$F_{\text{max}} = (M + m)a_{\text{max}} = 10 \times 8.613 = \mathbf{86.13} \text{ N}$$

চূড়ান্ত উত্তর:

ব্লকটি ওয়েজের সাপেক্ষে স্থির থাকার জন্য প্রযুক্ত বল F-এর প্রয়োজনীয় সীমা হবে:

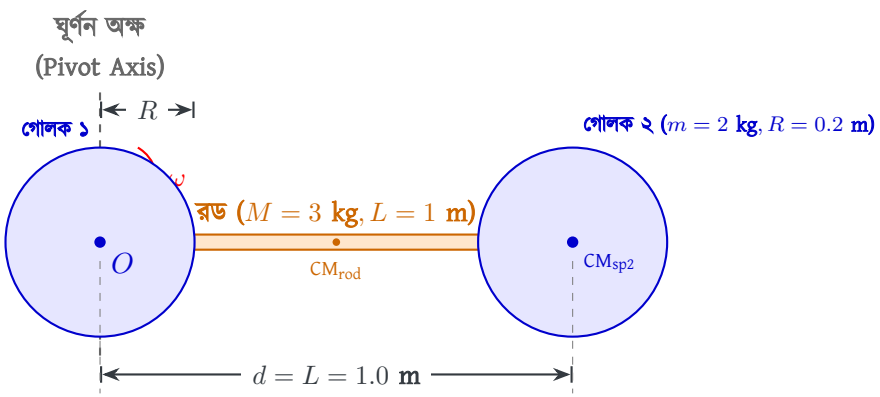
$$\mathbf{33.15} \text{ N} \leq \mathbf{F} \leq \mathbf{86.13} \text{ N}$$

প্রশ্ন (Question) 3

3 kg ভর এবং 1 m দৈর্ঘ্যের একটি সুষম রডের দুই প্রান্তে 2 kg ভর ও 0.2 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি অভিন্ন নিরেট গোলক দৃঢ়ভাবে যুক্ত করা হলো (গোলকদ্বয়ের কেন্দ্র ঠিক রডের দুই প্রান্তে অবস্থিত)। সমগ্র সিস্টেমটিকে একটি গোলকের কেন্দ্র O-এর মধ্য দিয়ে রডের দৈর্ঘ্যের সাথে লম্বভাবে অতিক্রান্ত একটি অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে পিভট (pivot) করে ঝুলিয়ে দেওয়া হলো। প্রথমে রডটিকে অনুভূমিক অবস্থানে স্থির রাখা হয়েছিল।

ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র সিস্টেমটির জড়তার ভ্রামক (I) নির্ণয় করো।

A system consists of a uniform rod of mass 3 kg and length 1 m with two identical solid spheres of mass 2 kg and radius 0.2 m welded at its two ends (the centers of the spheres lie exactly at the ends of the rod). The system is pivoted at the center O of one of the spheres about a horizontal axis perpendicular to the length of the rod. Determine the moment of inertia (I) of the entire system about the pivot axis.



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: ভৌত অবস্থা ও প্রয়োজনীয় সূত্র বিশ্লেষণ

এখানে প্রদত্ত সিস্টেমটি তিনটি জ্যামিতিক বস্তুর সমন্বয়ে গঠিত: দুটি নিরেট গোলক এবং একটি সুষম রড। প্রদত্ত মানসমূহ:

- রডের ভর, $M = 3$ kg, এবং দৈর্ঘ্য $L = 1$ m
- প্রতিটি নিরেট গোলকের ভর, $m = 2$ kg, এবং ব্যাসার্ধ $R = 0.2$ m

ঘূর্ণন অক্ষটি গোলক ১-এর কেন্দ্র O-গামী এবং রডের দৈর্ঘ্যের লম্ব। সমগ্র সিস্টেমের জড়তার ভ্রামক হবে এই তিনটি অংশের নিজ নিজ জড়তার ভ্রামকের সমষ্টি:

$$I = I_{sp1} + I_{rod} + I_{sp2}$$

ধাপ ২: প্রতিটি অংশের জড়তার ভ্রামক নির্ণয়

1. **গোলক ১-এর জড়তার ভ্রামক (I_{sp1}):**
   যেহেতু ঘূর্ণন অক্ষটি গোলক ১-এর ঠিক কেন্দ্র (O) দিয়ে যায়, তাই এর জড়তার ভ্রামক হবে তার নিজস্ব ব্যাসগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের সমান।

$$I_{\text{sp1}} = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5} \times 2 \times (0.2)^2 = 0.4 \times 2 \times 0.04 = \mathbf{0.032}\ \text{kg m}^2$$

2. **রডের জড়তার ভ্রামক (I_{rod}):**
   রডের একটি প্রান্ত O বিন্দুতে যুক্ত থাকায়, অক্ষটি রডের প্রান্তগামী। প্রান্তবিন্দুগামী অক্ষের সাপেক্ষে সুষম রডের জড়তার ভ্রামক:

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3} \times 3 \times (1)^2 = \mathbf{1.0}\ \text{kg m}^2$$

3. **গোলক ২-এর জড়তার ভ্রামক (I_{sp2}):**
   গোলক ২-এর ভরকেন্দ্র ঘূর্ণন অক্ষ O থেকে $d = L = 1$ m দূরত্বে অবস্থিত। এক্ষেত্রে আমাদের **সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য (Parallel Axis Theorem)** প্রয়োগ করতে হবে:

$$I_{\text{sp2}} = I_{\text{cm}} + md^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mL^2$$

$$I_{\text{sp2}} = 0.032 + 2 \times (1)^2 = 0.032 + 2.0 = \mathbf{2.032}\ \text{kg m}^2$$

ধাপ ৩: সিস্টেমের মোট জড়তার ভ্রামক নির্ণয়

প্রাপ্ত তিনটি জড়তার ভ্রামক যোগ করে পাই:

$$I = I_{\text{sp1}} + I_{\text{rod}} + I_{\text{sp2}} = 0.032 + 1.0 + 2.032$$

$$I = \mathbf{3.064}\ \text{kg m}^2$$

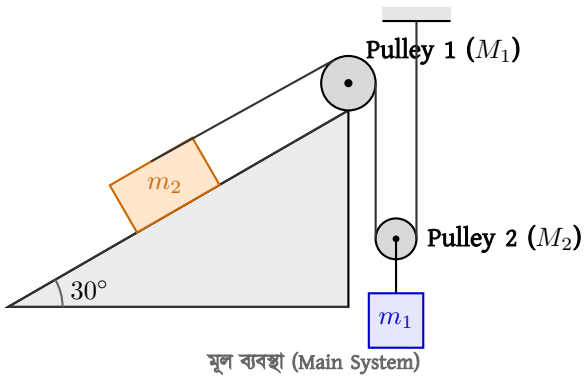
চূড়ান্ত উত্তর:
সিস্টেমটির মোট জড়তার ভ্রামক $\mathbf{3.064}$ kg m^2।

প্রশ্ন (Question) 4

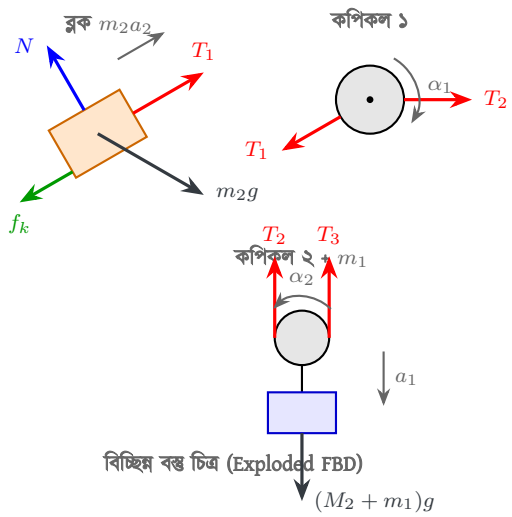
ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি খসখসে আনত তলের শীর্ষে একটি নিরেট সিলিন্ডারের ন্যায় ভারী কপিকল (Pulley 1) যুক্ত আছে, যার ভর $M_1 = 2$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R_1 = 10$ cm। আনত তলের উপর $m_2 = 4$ kg ভরের একটি ব্লক রাখা আছে, যা একটি সুতার সাহায্যে কপিকল ১-এর উপর দিয়ে ঝুলে আছে। সুতাটি পিছলানো ছাড়াই কপিকলের উপর দিয়ে গিয়ে নিচের দিকে একটি চলনশীল কপিকল (Movable Pulley 2)-কে জড়িয়ে ছাদের সাথে যুক্ত হয়েছে। চলনশীল কপিকলটির ভর $M_2 = 1$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R_2 = 5$ cm। চলনশীল কপিকলের কেন্দ্র থেকে $m_1 = 6$ kg ভরের একটি ভারী বস্তু ঝুলানো আছে।

যদি আনত তল ও ব্লকের মধ্যবর্তী স্থিতি ও গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $\mu_s = 0.3$ এবং $\mu_k = 0.2$ হয়, তবে সিস্টেমটি মুক্ত করার পর বস্তুগুলোর রৈখিক ত্বরণ (a_1 ও a_2) এবং সুতার তিনটি অংশের টান বল (T_1, T_2 ও T_3) নির্ণয় করো।
[$g = 9.8$ m/s^2]

A solid cylinder-like massive pulley (Pulley 1) of mass $M_1 = 2$ kg and radius $R_1 = 10$ cm is fixed at the peak of a rough inclined plane of angle 30°. A block of mass $m_2 = 4$ kg rests on the incline. A string passes over Pulley 1, hangs down to wrap around a movable pulley (Pulley 2, $M_2 = 1$ kg, $R_2 = 5$ cm), and is fixed to the ceiling. A mass $m_1 = 6$ kg hangs from Pulley 2. The coefficients of friction are $\mu_s = 0.3$ and $\mu_k = 0.2$. Find the linear accelerations (a_1, a_2) and the string tensions (T_1, T_2, T_3).



মূল ব্যবস্থা (Main System)



বিচ্ছিন্ন বস্তু চিত্র (Exploded FBD)

সমাধান (Solution)

ধাপ ১: জ্যামিতিক সীমাবদ্ধতা ও ত্বরণের সম্পর্ক (Constraint Equation)

চলনশীল কপিকল (Pulley 2) দুই প্রান্তের সুতা দ্বারা সমর্থিত। ডান প্রান্ত স্থির ছাদের সাথে যুক্ত এবং বাম প্রান্তটি কপিকল ১ হয়ে ব্লক m_2-এর সাথে যুক্ত। ধরি, চলনশীল কপিকল এবং বস্তু m_1 নিচের দিকে a_1 ত্বরণে নামছে এবং ব্লক m_2 আনত তলের সমান্তরালে উপরের দিকে a_2 ত্বরণে উঠছে। চলনশীল কপিকলের সম্পর্কের সূত্রানুযায়ী, কেন্দ্র a_1 ত্বরণে নামলে মুক্ত প্রান্তের ত্বরণ হবে $2a_1$।

$$a_2 = 2a_1 \implies a_1 = 0.5a_2 \quad \text{--- (সমীকরণ ১)}$$

ধাপ ২: ব্লক m_2-এর গতির সমীকরণ

ব্লকটি আনত তল বেয়ে উপরে ওঠায় ঘর্ষণ বল আনত তল বরাবর নিচের দিকে কাজ করবে:

$$f_k = \mu_k m_2 g \cos 30^\circ = 0.2 \times 4 \times 9.8 \times 0.866 \approx 6.79 \text{ N}$$

গতির সমীকরণ (T_1 উপরের দিকে, ওজন ও ঘর্ষণ নিচের দিকে):

$$T_1 - m_2 g \sin 30^\circ - f_k = m_2 a_2$$

$$T_1 - (4 \times 9.8 \times 0.5) - 6.79 = 4a_2 \implies T_1 - 19.6 - 6.79 = 4a_2$$

$$T_1 = 4a_2 + 26.39 \quad \text{--- (সমীকরণ ২)}$$

ধাপ ৩: কপিকল ১ (স্থির অক্ষের ঘূর্ণন) এর গতির সমীকরণ

কপিকল ১-এর জড়তার ভ্রামক $I_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2$ এবং কৌণিক ত্বরণ $\alpha_1 = \frac{a_2}{R_1}$। টর্কের সমীকরণ:

$$(T_2 - T_1)R_1 = I_1\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}M_1R_1^2\right)\left(\frac{a_2}{R_1}\right) \implies T_2 - T_1 = \frac{1}{2}M_1a_2$$

মান বসালে: $T_2 - T_1 = \frac{1}{2}(2)a_2 = a_2 \implies T_2 = T_1 + a_2$ --- (সমীকরণ ৩)

ধাপ ৪: কপিকল ২ (চলনশীল) এবং বস্তু ১-এর গতি সমীকরণ

কপিকল ২ ঘূর্ণনের পাশাপাশি নিচে নামছে। ডান পাশের সুতাটি স্থির থাকায় এর কৌণিক ত্বরণ $\alpha_2 = \frac{a_1}{R_2}$। কপিকল ২-এর ঘূর্ণনের জন্য টর্কের সমীকরণ (ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে):

$$(T_3 - T_2)R_2 = I_2\alpha_2 = \left(\frac{1}{2}M_2R_2^2\right)\left(\frac{a_1}{R_2}\right) \implies T_3 - T_2 = \frac{1}{2}M_2a_1 = 0.5a_1 \quad \text{--- (সমীকরণ ৪)}$$

ঝুলন্ত সম্মিলিত ব্যবস্থার (m_1 + কপিকল ২) রৈখিক গতিসূত্র:

$$(m_1 + M_2)g - T_2 - T_3 = (m_1 + M_2)a_1 \implies 7g - T_2 - T_3 = 7a_1 \quad \text{--- (সমীকরণ ৫)}$$

ধাপ ৫: সমীকরণসমূহের সমাধান

(সমীকরণ ১) হতে $a_1 = 0.5a_2$ ব্যবহার করে সকল রাশিকে a_2-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি:

- $T_1 = 4a_2 + 26.39$
- $T_2 = (4a_2 + 26.39) + a_2 = 5a_2 + 26.39$
- $T_3 = T_2 + 0.5a_1 = (5a_2 + 26.39) + 0.5(0.5a_2) = 5.25a_2 + 26.39$

T_2 ও T_3-এর মান সমীকরণ ৫-এ বসাই:

$$7(9.8) - (5a_2 + 26.39) - (5.25a_2 + 26.39) = 7(0.5a_2)$$

$$68.6 - 10.25a_2 - 52.78 = 3.5a_2 \implies 15.82 = 13.75a_2 \implies \mathbf{a_2} \approx \mathbf{1.15}\ \mathrm{m/s^2}$$

অন্যান্য মানসমূহ:

- ত্বরণ: $a_1 = 0.5 \times 1.15 = \mathbf{0.575}\ \mathrm{m/s^2}$
- টান বল: $T_1 = 4(1.15) + 26.39 = \mathbf{30.99}\ \mathrm{N}$
- টান বল: $T_2 = 5(1.15) + 26.39 = \mathbf{32.14}\ \mathrm{N}$
- টান বল: $T_3 = 5.25(1.15) + 26.39 = \mathbf{32.43}\ \mathrm{N}$

চূড়ান্ত উত্তর:

বস্তুগুলোর রৈখিক ত্বরণ যথাক্রমে $a_1 = 0.575\ \mathrm{m/s^2}$ এবং $a_2 = 1.15\ \mathrm{m/s^2}$।

সুতার তিনটি অংশের টান বল যথাক্রমে $T_1 = 30.99\ \mathrm{N}$, $T_2 = 32.14\ \mathrm{N}$ এবং $T_3 = 32.43\ \mathrm{N}$।

প্রশ্ন (Question) 5

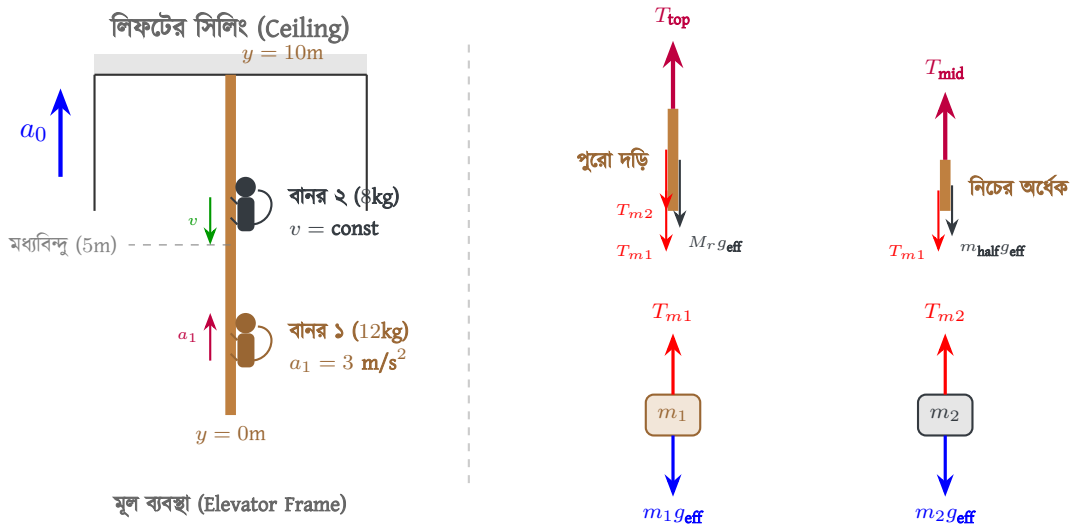
$2.2\ m/s^2$ ত্বরণে খাড়া উপরের দিকে ত্বরিত একটি লিফটের সিলিং থেকে $10\ m$ দীর্ঘ এবং $4\ kg$ ভরের একটি ভারী সুষম দড়ি ঝুলানো আছে। দড়িটির নিচের প্রান্ত থেকে $2\ m$ উঁচুতে $12\ kg$ ভরের একটি বানর (বানর ১) দড়ির সাপেক্ষে $3\ m/s^2$ আপেক্ষিক ত্বরণে উপরের দিকে উঠছে। একই সময়ে, দড়ির নিচের প্রান্ত থেকে $6\ m$ উঁচুতে $8\ kg$ ভরের আরেকটি বানর (বানর ২) দড়ির সাপেক্ষে $2\ m/s$ সুষম বেগে নিচের দিকে নেমে যাচ্ছে। এই অবস্থায়—

(ক) দড়িটির একদম শীর্ষবিন্দুতে (যেখানে এটি লিফটের সিলিংয়ের সাথে যুক্ত) অনুভূত টান বল নির্ণয় করো।

(খ) দড়িটির ঠিক মধ্যবিন্দুতে (নিচের প্রান্ত থেকে $5\ m$ উঁচুতে) অনুভূত টান বল কত হবে?

$[g = 9.8\ m/s^2]$

A heavy uniform rope of length 10 m and mass 4 kg is suspended from the ceiling of an elevator that is accelerating vertically upwards with an acceleration of $2.2\ m/s^2$. A monkey of mass 12 kg (Monkey 1) is climbing up the rope with an acceleration of $3\ m/s^2$ relative to the rope at a height of 2 m from the bottom. Simultaneously, another monkey of mass 8 kg (Monkey 2) is sliding down the rope with a constant velocity of 2 m/s relative to the rope at a height of 6 m from the bottom. In this state— (a) Find the tension in the rope at its topmost point. (b) What will be the tension in the rope at its exact midpoint? $[g = 9.8\ m/s^2]$



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: কার্যকারী অভিকর্ষজ ত্বরণ (Effective Gravity, g_{eff}) নির্ণয়

লিফটটি খাড়া উপরের দিকে $a_0 = 2.2\ \text{m/s}^2$ ত্বরণে গতিশীল হওয়ায়, আমরা লিফটের ত্বরিত কাঠামোতে (Non-inertial Frame) গতি বিশ্লেষণ করব। লিফটের ভেতরের সকল বস্তুর ওপর নিচের দিকে একটি ছদ্ম বল (Pseudo-force) ক্রিয়া করবে। অতএব, লিফটের কাঠামোতে কার্যকারী অভিকর্ষজ ত্বরণ হবে:

$$g_{\text{eff}} = g + a_0 = 9.8 + 2.2 = \mathbf{12}\ \text{m/s}^{\mathbf{2}}$$

যেহেতু দড়িটি লিফটের সিলিংয়ের সাথে দৃঢ়ভাবে বাঁধা, তাই লিফটের সাপেক্ষে দড়িটি স্থির।

ধাপ ২: বানরদ্বয় কর্তৃক দড়ির ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয়

বানরগুলো সুতার সাপেক্ষে যে বল প্রয়োগ করবে, নিউটনের ৩য় সূত্রানুযায়ী সুতাও তাদের ওপর সমান ও বিপরীতমুখী টান বল প্রয়োগ করবে।

- **বানর ১ ($m_1 = 12$ kg):** বানরটি দড়ির সাপেক্ষে $a_1 = 3\ \text{m/s}^2$ ত্বরণে উপরের দিকে উঠছে।

$$T_{m1} - m_1 g_{\text{eff}} = m_1 a_1 \implies T_{m1} = m_1(g_{\text{eff}} + a_1)$$

$$T_{m1} = 12 \times (12 + 3) = 12 \times 15 = \mathbf{180}\ \text{N}$$

  অর্থাৎ, বানর ১ দড়িটির নিচের প্রান্ত থেকে $2\ \text{m}$ উঁচুতে খাড়া **নিচের দিকে** $180\ \text{N}$ বল প্রয়োগ করবে।

- **বানর ২ ($m_2 = 8$ kg):** বানরটি দড়ির সাপেক্ষে সুষম বেগে নিচে নামছে, অর্থাৎ ত্বরণ $a_2 = 0$।

$$T_{m2} - m_2 g_{\text{eff}} = 0 \implies T_{m2} = m_2 g_{\text{eff}}$$

$$T_{m2} = 8 \times 12 = \mathbf{96}\ \text{N}$$

  অর্থাৎ, বানর ২ দড়িটির নিচের প্রান্ত থেকে $6\ \text{m}$ উঁচুতে খাড়া **নিচের দিকে** $96\ \text{N}$ বল প্রয়োগ করবে।

ধাপ ৩: দড়ির বিভিন্ন অংশে টান বলের হিসাব

দড়ির প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর, $\lambda = \frac{M_r}{L} = \frac{4\ \text{kg}}{10\ \text{m}} = 0.4\ \text{kg/m}$। ভারী দড়ির যেকোনো উচ্চতায় অনুভূত টান বল হলো ওই বিন্দুর নিচের অংশের মোট ওজন (কার্যকারী) এবং নিচের অংশের ওপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বলসমূহের সমষ্টি।

- **(ক) দড়ির শীর্ষবিন্দুতে টান বল ($y = 10$ m):**
  শীর্ষবিন্দুর নিচে পুরো $10\ \text{m}$ দড়ি এবং দুটি বানরই অবস্থিত।

$$T_{\text{top}} = (M_r \times g_{\text{eff}}) + T_{m1} + T_{m2}$$

$$T_{\text{top}} = (4 \times 12) + 180 + 96 = 48 + 180 + 96 = \mathbf{324}\ \text{N}$$

- **(খ) দড়ির মধ্যবিন্দুতে টান বল ($y = 5$ m):**
  মধ্যবিন্দুর নিচে দড়ির অর্ধেক অংশ ($5\ \text{m}$) এবং শুধুমাত্র বানর ১ ($2\ \text{m}$ উঁচুতে) রয়েছে। বানর ২

(6 m উঁচুতে) মধ্যবিন্দুর উপরে থাকায় তার বল মধ্যবিন্দুর টানে কোনো ভূমিকা রাখবে না। নিচের অর্ধেক দড়ির ভর, $m_{\text{half}} = \lambda \times y = 0.4 \times 5 = 2$ kg।

$$T_{\text{mid}} = (m_{\text{half}} \times g_{\text{eff}}) + T_{m1}$$

$$T_{\text{mid}} = (2 \times 12) + 180 = 24 + 180 = \mathbf{204} \text{ N}$$

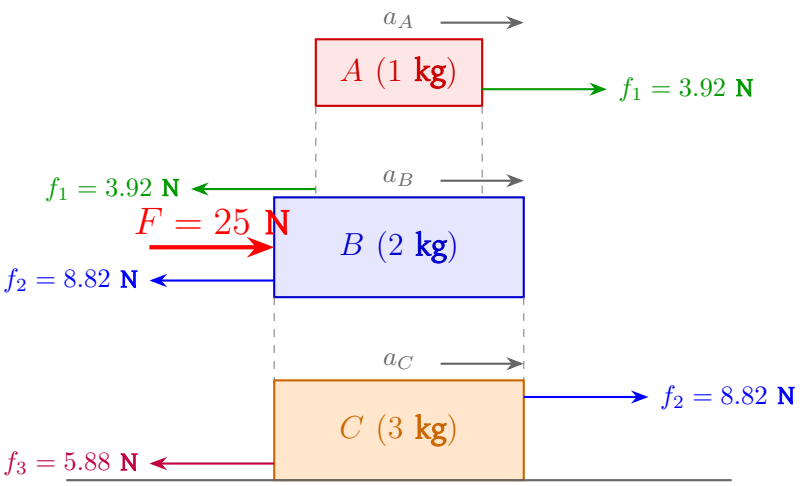
চূড়ান্ত উত্তর:
(ক) দড়িটির একদম শীর্ষবিন্দুতে অনুভূত টান বল হবে **324** N।
(খ) দড়িটির ঠিক মধ্যবিন্দুতে অনুভূত টান বল হবে **204** N।

প্রশ্ন (Question) 6

একটি অনুভূমিক মসৃণ মেঝের ওপর চিত্রে প্রদর্শিত তিনটি ব্লক A, B এবং C একটির ওপর আরেকটি সাজিয়ে রাখা আছে। ব্লকগুলোর ভর যথাক্রমে $m_A = 1$ kg, $m_B = 2$ kg এবং $m_C = 3$ kg।
A ও B ব্লকের মধ্যকার স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_1 = 0.4$
B ও C ব্লকের মধ্যকার স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_2 = 0.3$
C ব্লক ও মেঝের মধ্যকার ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_3 = 0.1$
মেঝের ওপর অবস্থিত সর্বনিম্ন ব্লক C-এর পরিবর্তে মাঝের ব্লক B-এর ওপর একটি অনুভূমিক বল F ডানদিকে প্রয়োগ করা হলো।

যদি প্রযুক্ত বলের মান $F = 25$ N হয়, তবে প্রতিটি ব্লকের ত্বরণ কত হবে? ব্লকগুলোর মধ্যকার ঘর্ষণ বলগুলোর মান এবং গতির প্রকৃতি (Nature of motion) বিস্তারিত বিশ্লেষণ করে দেখাও।
[$g = 9.8$ m/s^2]

Using the same stem as the previous question: Three blocks A, B, and C (1 kg, 2 kg, 3 kg) are stacked. Frictions are $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.3$, $\mu_3 = 0.1$. If a horizontal force $F = 25$ N is applied to block B, analyze the nature of the motion (full slipping regime) and determine the exact acceleration of each block.



বিচ্ছিন্ন বস্তু চিত্র (Exploded FBD for Full Slipping)

সমাধান (Solution)

ধাপ ১: সীমানা মান স্মরণ (Recalling Limits)

পূর্বের গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে আমরা জানি, প্রতিটি স্পর্শতলের সর্বোচ্চ ঘর্ষণ বল হলো:

- A ও B এর মধ্যে: $f_{s1,\text{max}} = 3.92$ N (যা A ব্লককে সর্বোচ্চ $a_{\text{limit},1} = 3.92$ m/s^2 ত্বরণ দিতে পারে)
- B ও C এর মধ্যে: $f_{s2,\text{max}} = 8.82$ N
- C ও মেঝের মধ্যে: $f_{s3,\text{max}} = 5.88$ N

ধাপ ২: গতির প্রকৃতি যাচাই (Checking Slipping Condition)

প্রযুক্ত বল $F = 25$ N বেশ বড়। আমরা পরীক্ষা করে দেখব A ও B-এর সংযোগস্থলে পিছলে যাওয়া (Slipping) ঘটে কি না। যদি A ও B একত্রে চলত, তবে তাদের সম্মিলিত ত্বরণ হতো:

$$a_{AB} = \frac{F - f_2}{m_A + m_B} = \frac{25 - 8.82}{1 + 2} = \frac{16.18}{3} \approx 5.39 \text{ m/s}^2$$

কিন্তু, আমরা জানি A ব্লকের সর্বোচ্চ সম্ভব ত্বরণ 3.92 m/s^2। যেহেতু নির্ণীত $a_{AB}(5.39 \text{ m/s}^2) > a_{\text{limit},1}(3.92 \text{ m/s}^2)$, তাই A ব্লক B ব্লকের সাথে একত্রে চলতে পারবে না।

অর্থাৎ, **তিনটি ব্লকের প্রতিটিতেই আপেক্ষিক গতি (Full Slipping) বিদ্যমান থাকবে** এবং ঘর্ষণ বলগুলো তাদের সর্বোচ্চ সীমায় কাজ করবে।

ধাপ ৩: প্রতিটি ব্লকের আলাদা গতির সমীকরণ ও ত্বরণ নির্ণয়

যেহেতু ব্লকগুলো পিছলে যাচ্ছে, প্রতিটি ব্লকের মুক্ত বস্তু চিত্র (FBD) বিশ্লেষণ করে ত্বরণ বের করি:

- **ব্লক A-এর ত্বরণ (a_A):**
  A ব্লককে কেবল $f_1 = 3.92$ N বলটি সামনে টানে।

$$m_A a_A = f_1 \implies 1 \times a_A = 3.92 \implies \mathbf{a_A = 3.92} \text{ m/s}^2$$

- **ব্লক C-এর ত্বরণ (a_C):**
  C ব্লককে B ব্লক $f_2 = 8.82$ N বল দ্বারা সামনে টানে এবং মেঝে $f_3 = 5.88$ N বল দ্বারা বাধা দেয়।

$$m_C a_C = f_2 - f_3 \implies 3 \times a_C = 8.82 - 5.88 \implies 3a_C = 2.94 \implies \mathbf{a_C = 0.98}\ \text{m/s}^2$$

- **ব্লক B-এর ত্বরণ (a_B):**
  B ব্লকের ওপর ডানদিকে প্রযুক্ত বল $F = 25$ N। এর গতিকে বাধা দেয় A ব্লক কর্তৃক পেছনের দিকে প্রযুক্ত ঘর্ষণ $f_1 = 3.92$ N এবং C ব্লক কর্তৃক পেছনের দিকে প্রযুক্ত ঘর্ষণ $f_2 = 8.82$ N।

$$F - f_1 - f_2 = m_B a_B$$

$$25 - 3.92 - 8.82 = 2a_B$$

$$25 - 12.74 = 2a_B \implies 12.26 = 2a_B \implies \mathbf{a_B = 6.13}\ \text{m/s}^2$$

চূড়ান্ত উত্তর:
$F = 25$ N হলে তিনটি ব্লকের মধ্যেই আপেক্ষিক গতি থাকবে (Full Slipping)।
ত্বরণসমূহ: $a_A = 3.92\ \text{m/s}^2$, $a_B = 6.13\ \text{m/s}^2$, $a_C = 0.98\ \text{m/s}^2$।

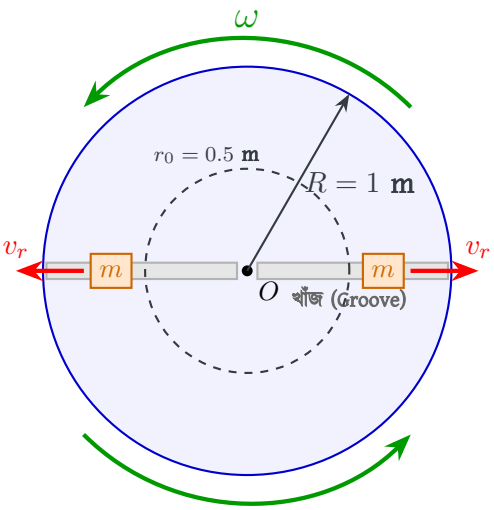
প্রশ্ন (Question) 7

$M = 8$ kg ভর এবং $R = 1$ m ব্যাসার্ধের একটি পাতলা মসৃণ বৃত্তাকার ডিস্ক অনুভূমিক তলে তার কেন্দ্রগামী একটি ঘর্ষণহীন খাড়া অক্ষের সাপেক্ষে $\omega_0 = 6$ rad/s আদি কৌণিক বেগে মুক্তভাবে ঘুরছে। ডিস্কটির ওপর কেন্দ্র থেকে ব্যাসার্ধ বরাবর দুটি মসৃণ খাঁজ (frictionless radial grooves) কাটা আছে। প্রতিটি $m = 1$ kg ভরের দুটি ক্ষুদ্র ব্লককে (যা খাঁজ বরাবর পিছলে চলতে পারে) শুরুতে কেন্দ্র থেকে $r_0 = 0.5$ m দূরত্বে ধরে রাখা হয়েছিল। সিস্টেমটি ঘুরন্ত থাকা অবস্থায় ব্লক দুটিকে স্থির অবস্থা থেকে মুক্ত করে দেওয়া হলো।

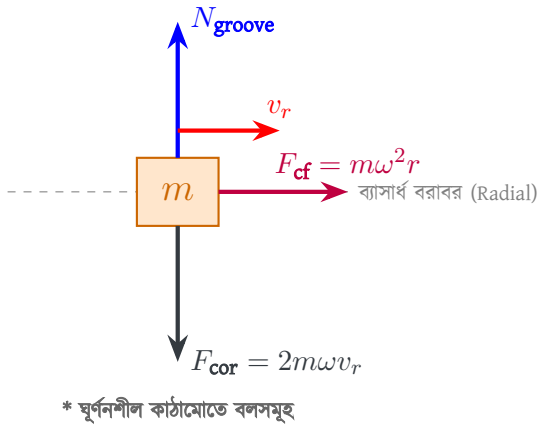
(ক) ব্লক দুটি যখন ডিস্কের একদম শেষ প্রান্তে (পরিধিতে, $r = R$) পৌঁছায়, তখন সিস্টেমের কৌণিক বেগ (ω_f) কত হবে?

(খ) ঠিক পরিধিতে পৌঁছানোর মুহূর্তে ডিস্কের সাপেক্ষে ব্লক দুটির ব্যাসার্ধ বরাবর আপেক্ষিক বেগ (radial velocity, v_r) কত হবে?

A thin, smooth circular disk of mass $M = 8$ kg and radius $R = 1$ m rotates freely in a horizontal plane with an initial angular velocity $\omega_0 = 6$ rad/s about a frictionless vertical axle passing through its center. Two frictionless radial grooves are cut along the disk from the center. Two small blocks (acting as point masses), each of mass $m = 1$ kg, are initially held at rest relative to the disk at a distance $r_0 = 0.5$ m from the center. While the system is rotating, the blocks are released. (a) What will be the angular velocity (ω_f) of the system when the blocks reach the outer edge of the disk ($r = R$)? (b) What will be the radial velocity (v_r) of the blocks relative to the disk at the exact instant they reach the outer edge?



মূল ব্যবস্থা (Main System)



মুক্ত বস্তু চিত্র (FBD in Rotating Frame)

সমাধান (Solution)

ধাপ ১: (ক) চূড়ান্ত কৌণিক বেগ (ω_f) নির্ণয়

যেহেতু ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বাইরে থেকে কোনো বাহ্যিক টর্ক প্রয়োগ করা হয়নি ($\tau_{\text{ext}} = 0$), তাই সিস্টেমের মোট কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

$$L_i = L_f \implies I_i\omega_0 = I_f\omega_f$$

প্রাথমিক জড়তার ভ্রামক (I_i):

ডিস্কের জড়তার ভ্রামক, $I_{\text{disk}} = \frac{1}{2}MR^2$। r_0 দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দু-ভরের (ক্ষুদ্র ব্লক) জড়তার ভ্রামক, $I_{\text{mass, i}} = 2 \times mr_0^2$।

$$I_i = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr_0^2$$
$$I_i = \frac{1}{2}(8)(1)^2 + 2(1)(0.5)^2 = 4 + 2(0.25) = 4 + 0.5 = \mathbf{4.5}\ \text{kg m}^2$$

চূড়ান্ত জড়তার ভ্রামক (I_f):

যখন ব্লক দুটি পরিধিতে ($R = 1$ m) পৌঁছায়:

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2$$
$$I_f = \frac{1}{2}(8)(1)^2 + 2(1)(1)^2 = 4 + 2 = \mathbf{6}\ \text{kg m}^2$$

কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণশীলতা প্রয়োগ:

$$I_i\omega_0 = I_f\omega_f$$
$$4.5 \times 6 = 6 \times \omega_f$$
$$27 = 6\omega_f \implies \omega_f = \frac{27}{6} = \mathbf{4.5}\ \text{rad/s}$$

ধাপ ২: (খ) ব্লক দুটির ব্যাসার্ধীয় আপেক্ষিক বেগ (v_r) নির্ণয়

যেহেতু খাঁজগুলো সম্পূর্ণ ঘর্ষণহীন এবং ব্যবস্থার ওপর কোনো অসংরক্ষণশীল বল (non-conservative force) কাজ করছে না, তাই সিস্টেমের মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকবে: $E_i = E_f$।

প্রাথমিক মোট যান্ত্রিক শক্তি (E_i):

শুরুতে ব্লক দুটির কোনো ব্যাসার্ধীয় বেগ ছিল না (ডিস্কের সাপেক্ষে স্থির)। অতএব, মোট শক্তি হলো প্রাথমিক ঘূর্ণন গতিশক্তি:

$$E_i = \frac{1}{2}I_i\omega_0^2 = \frac{1}{2} \times 4.5 \times (6)^2 = \frac{1}{2} \times 4.5 \times 36 = \mathbf{81}\ \text{J}$$

চূড়ান্ত মোট যান্ত্রিক শক্তি (E_f):

চূড়ান্ত অবস্থায় সিস্টেমে দুই ধরনের গতিশক্তি রয়েছে:

i. ডিস্ক ও ব্লকের সম্মিলিত ঘূর্ণন গতিশক্তি: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2$

ii. ব্লক দুটির ব্যাসার্ধ বরাবর খাঁজ বেয়ে বাইরের দিকে যাওয়ার রৈখিক গতিশক্তি: $K_{\text{rad}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} m v_r^2\right) = m v_r^2$

অতএব, $E_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 + m v_r^2$।

শক্তির সংরক্ষণশীলতা সমীকরণ:

$$
\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 + m v_r^2 \\
81 &= \left(\frac{1}{2} \times 6 \times (4.5)^2\right) + 1 \times v_r^2 \\
81 &= 3 \times 20.25 + v_r^2 \\
81 &= 60.75 + v_r^2 \\
v_r^2 &= 81 - 60.75 = 20.25 \\
v_r &= \sqrt{20.25} = \mathbf{4.5}\ \text{m/s}
\end{aligned}
$$

চূড়ান্ত উত্তর:

(ক) সিস্টেমটির চূড়ান্ত কৌণিক বেগ হবে $\mathbf{4.5}$ rad/s।

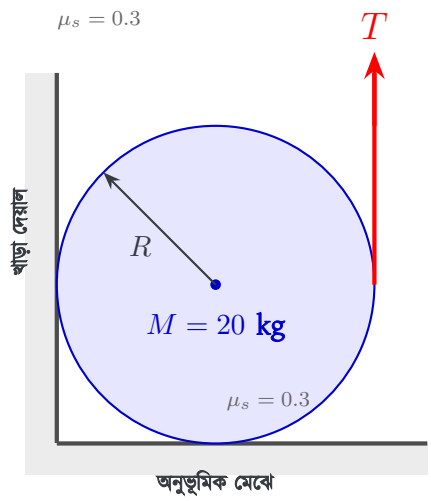
(খ) ঠিক পরিধিতে পৌঁছানোর মুহূর্তে ডিস্কের সাপেক্ষে ব্লক দুটির আপেক্ষিক ব্যাসার্ধীয় বেগ হবে $\mathbf{4.5}$ m/s।

প্রশ্ন (Question) 8

$M = 20$ kg ভর এবং R ব্যাসার্ধের একটি নিরেট সুষম সিলিন্ডারকে একটি কোণায় রাখা হয়েছে, যেখানে একটি খাড়া উল্লম্ব দেয়াল এবং একটি অনুভূমিক মেঝে পরস্পর লম্বভাবে মিলিত হয়েছে। সিলিন্ডারটির ওপর খাড়া দেয়াল এবং অনুভূমিক মেঝে উভয় স্পর্শতলের স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_s = 0.3$।

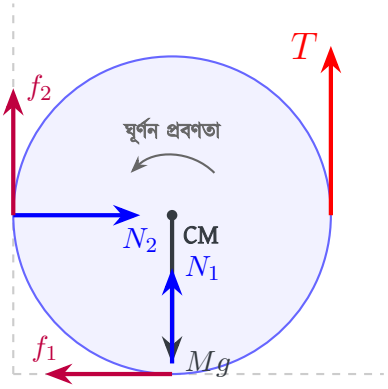
সিলিন্ডারটির বাইরের পরিধির ওপর একটি হালকা সুতা জড়ানো আছে এবং সুতার মুক্ত প্রান্তটি সিলিন্ডারের ডানদিকের শেষ প্রান্ত স্পর্শক বরাবর খাড়া উপরের দিকে ধরে রাখা হয়েছে। সুতাটিকে খাড়া উপরের দিকে সর্বনিম্ন কত টান বল (T) দ্বারা টানলে সিলিন্ডারটি কোণার মধ্যে ঘুরতে (পিছলে যেতে) শুরু করবে? $[g = 9.8\ m/s^2]$

A uniform solid cylinder of mass $M = 20$ kg and radius R is placed in a corner where a vertical wall and a horizontal floor meet at a right angle. The coefficient of static friction at both the vertical wall and the horizontal floor contact surfaces is $\mu_s = 0.3$. A light string is wrapped around the outer circumference of the cylinder, and its free end is pulled vertically upwards tangentially from the rightmost edge of the cylinder. What is the minimum tension (T) required to make the cylinder start rotating (slipping) in the corner? $[g = 9.8\ m/s^2]$



সমাধান (Solution)

সিলিন্ডারটির ঘূর্ণন শুরু হওয়ার ঠিক পূর্বমুহূর্তে এটি সীমান্তিক সাম্যাবস্থায় (Limiting Equilibrium) থাকবে। এই অবস্থায় সিলিন্ডারের ওপর ক্রিয়াশীল বলসমূহকে একটি মুক্ত বস্তু চিত্রে (FBD) উপস্থাপন করা হলো:



ধাপ ১: বলসমূহের সাম্যাবস্থার সমীকরণ

- **অনুভূমিক বলের সাম্যাবস্থা ($\Sigma F_x = 0$):**
  দেয়ালের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া ডানদিকে এবং মেঝের ঘর্ষণ বল বামদিকে কাজ করে।

$$N_2 - f_1 = 0 \implies N_2 = f_1 \quad \text{--- (১)}$$

- **উল্লম্ব বলের সাম্যাবস্থা ($\Sigma F_y = 0$):**
  মেঝের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, দেয়ালের ঘর্ষণ বল এবং সুতার টান উপরের দিকে, আর ওজন নিচের দিকে কাজ করে।

$$N_1 + f_2 + T - Mg = 0 \implies N_1 + f_2 + T = Mg \quad \text{--- (২)}$$

- **ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে টর্কের সাম্যাবস্থা ($\Sigma \tau = 0$):**
  টান বল T ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (CCW) টর্ক তৈরি করে। ঘর্ষণ বল f_1 এবং f_2 ঘড়ির কাঁটার দিকে (CW) টর্ক তৈরি করে। N_1, N_2, এবং Mg কেন্দ্রগামী হওয়ায় এদের টর্ক শূন্য।

$$T \cdot R - f_1 \cdot R - f_2 \cdot R = 0 \implies T = f_1 + f_2 \quad \text{--- (৩)}$$

ধাপ ২: সীমান্তিক ঘর্ষণ বলের শর্ত প্রয়োগ

ঘূর্ণন শুরু হওয়ার ঠিক পূর্বমুহূর্তে উভয় স্পর্শতলেই সীমান্তিক স্থিতি ঘর্ষণ বল (Limiting Friction) ক্রিয়াশীল হবে:

$$f_1 = \mu_s N_1$$

$$f_2 = \mu_s N_2$$

সমীকরণ (১) অনুযায়ী $N_2 = f_1$, তাই:

$$N_2 = \mu_s N_1$$

অতএব, দেয়ালের ঘর্ষণ বল f_2-কে N_1-এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে:

$$f_2 = \mu_s N_2 = \mu_s(\mu_s N_1) = \mu_s^2 N_1$$

ধাপ ৩: সমীকরণসমূহের সমাধান

সমীকরণ (২)-এ f_2 এর মান বসিয়ে N_1 বের করি:

$$N_1 + \mu_s^2 N_1 + T = Mg$$
$$N_1(1+\mu_s^2) = Mg - T \implies N_1 = \frac{Mg-T}{1+\mu_s^2} \quad \text{--- (৪)}$$

এখন সমীকরণ (৩)-এ f_1 ও f_2 এর মান বসাই:

$$T = \mu_s N_1 + \mu_s^2 N_1 = \mu_s(1+\mu_s)N_1$$

(৪) নং সমীকরণ থেকে N_1-এর মান বসিয়ে পাই:

$$T = \mu_s(1+\mu_s)\left(\frac{Mg-T}{1+\mu_s^2}\right)$$
$$T(1+\mu_s^2) = \mu_s(1+\mu_s)Mg - \mu_s(1+\mu_s)T$$
$$T\left[(1+\mu_s^2) + \mu_s(1+\mu_s)\right] = \mu_s(1+\mu_s)Mg$$
$$T\left[1+\mu_s+2\mu_s^2\right] = \mu_s(1+\mu_s)Mg$$
$$T = \frac{\mu_s(1+\mu_s)}{1+\mu_s+2\mu_s^2}Mg$$

ধাপ ৪: সাংখ্যিক মান বসিয়ে টান বল হিসাব

প্রদত্ত মানসমূহ: $M = 20$ kg, $\mu_s = 0.3$, $g = 9.8$ m/s^2।

$$Mg = 20 \times 9.8 = 196 \text{ N}$$

$$T = \frac{0.3(1+0.3)}{1+0.3+2(0.3)^2} \times 196$$
$$T = \frac{0.3 \times 1.3}{1.3+2(0.09)} \times 196$$
$$T = \frac{0.39}{1.3+0.18} \times 196 = \frac{0.39}{1.48} \times 196$$
$$T \approx 0.2635 \times 196 \approx \mathbf{51.65} \text{ N}$$

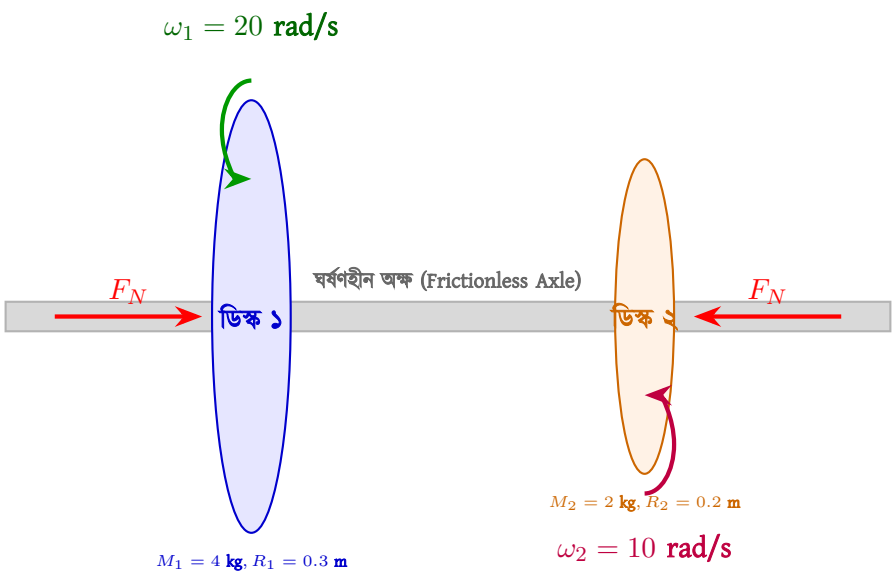
চূড়ান্ত উত্তর:
সিলিন্ডারটিকে ঘোরাতে সুতাটিতে প্রয়োজনীয় ন্যূনতম টান বল হবে **51.65** N।

প্রশ্ন (Question) 9

$M_1 = 4$ kg ভর ও $R_1 = 0.3$ m ব্যাসার্ধের একটি নিরেট সুষম ডিস্ক (ডিস্ক ১) একটি অনুভূমিক ঘর্ষণহীন অক্ষের সাপেক্ষে $\omega_1 = 20$ rad/s কৌণিক বেগে ঘুরছে। $M_2 = 2$ kg ভর ও $R_2 = 0.2$ m ব্যাসার্ধের অপর একটি নিরেট সুষম ডিস্ক (ডিস্ক ২) একই অক্ষের সাপেক্ষে বিপরীত অভিমুখে $\omega_2 = 10$ rad/s কৌণিক বেগে ঘুরছে।

ডিস্ক দুটিকে অক্ষ বরাবর পরস্পর মুখোমুখি সংস্পর্শে এনে একটি ধ্রুব অনুভূমিক বল $F_N = 60$ N দ্বারা চেপে ধরা হলো। ডিস্ক দুটির স্পর্শতলের গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_k = 0.3$ এবং স্পর্শতল জুড়ে চাপ সুষম (uniform contact pressure) থাকলে, ডিস্ক দুটির মধ্যকার আপেক্ষিক পিছলানো (slipping) বন্ধ হতে কত সময় (t) লাগবে এবং এই প্রক্রিয়ায় মোট কত তাপশক্তি (ΔE) উৎপন্ন হবে?

A uniform solid disk of mass $M_1 = 4$ kg and radius $R_1 = 0.3$ m (Disk 1) rotates about a horizontal frictionless axle with an angular velocity of $\omega_1 = 20$ rad/s. Another uniform solid disk of mass $M_2 = 2$ kg and radius $R_2 = 0.2$ m (Disk 2) rotates about the same axle in the opposite direction with an angular velocity of $\omega_2 = 10$ rad/s. The two disks are brought face-to-face coaxially and pressed together with a constant normal force $F_N = 60$ N. If the coefficient of kinetic friction between the contacting surfaces is $\mu_k = 0.3$ and the contact pressure is uniform across the surface, how much time (t) will it take for the relative slipping between the disks to cease, and how much total thermal energy (ΔE) will be generated in the process?



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: স্পর্শতলের ঘর্ষণজনিত প্রতিরোধক টর্ক (τ_f) নির্ণয়

যখন দুটি ভিন্ন ব্যাসার্ধের ডিস্ক (Disk 1: $R_1 = 0.3$ m এবং Disk 2: $R_2 = 0.2$ m) অক্ষ বরাবর সংস্পর্শে আনা হয়, তখন তাদের পারস্পরিক সংস্পর্শ ক্ষেত্রফলটি মূলত ছোট ডিস্কটির ব্যাসার্ধ দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। অর্থাৎ, ঘর্ষণজনিত মিথস্ক্রিয়া কেবল R_2 ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার অঞ্চলেই ঘটে। ধরা যাক, এই সংস্পর্শ তলে লম্ব বল বা চাপ সুষমভাবে (uniformly) বণ্টিত আছে।

1. **সুষম চাপ নির্ণয় (P):** প্রদত্ত মোট লম্ব বল বা থ্রাস্ট ফোর্স হলো $F_N = 60$ N। সুষম চাপের পরিমাণ হবে:

$$P = \frac{F_N}{\text{Contact Area}} = \frac{F_N}{\pi R_2^2}$$

2. **অন্তরক টর্ক নির্ণয় (Elementary Torque):** কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে অবস্থিত dr পুরুত্বের একটি পাতলা রিং আকৃতির ক্ষেত্রফল বিবেচনা করি:

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

এই রিংটির ওপর প্রযুক্ত লম্ব বল (dN) হবে:

$$dN = P \cdot dA = \left(\frac{F_N}{\pi R_2^2}\right) \cdot (2\pi r \cdot dr) = \frac{2F_N}{R_2^2} \cdot r \cdot dr$$

এই ক্ষুদ্র লম্ব বলের কারণে রিংটির ওপর উদ্ভূত ঘর্ষণ বল (df) হবে:

$$df = \mu_k \cdot dN = \frac{2\mu_k F_N}{R_2^2} \cdot r \cdot dr$$

ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে এই ঘর্ষণ বলের কারণে সৃষ্ট অন্তরক টর্ক ($d\tau$) হবে:

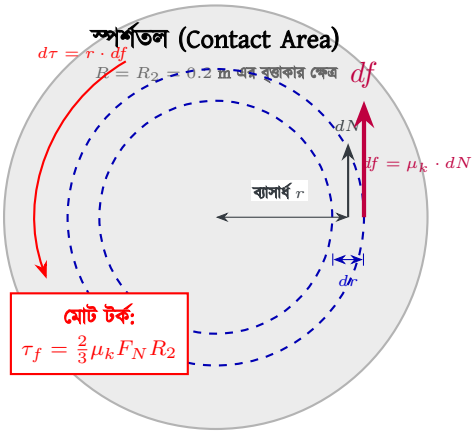
$$d\tau = r \cdot df = \frac{2\mu_k F_N}{R_2^2} \cdot r^2 \cdot dr$$

3. **মোট প্রতিরোধক টর্ক নির্ণয় (τ_f):** কেন্দ্র ($r = 0$) থেকে সম্পূর্ণ সংস্পর্শ অঞ্চলের প্রান্ত ($r = R_2$) পর্যন্ত সমাকলন করে পাই:

$$\tau_f = \int_0^{R_2} d\tau = \frac{2\mu_k F_N}{R_2^2} \int_0^{R_2} r^2 \cdot dr = \frac{2\mu_k F_N}{R_2^2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R_2} = \frac{2}{3}\mu_k F_N R_2$$

প্রদত্ত মানসমূহ ($R = R_2 = 0.2$ m) প্রতিস্থাপন করে পাই:

$$\tau_f = \frac{2}{3} \times 0.3 \times 60 \times 0.2 = \mathbf{2.4} \text{ N m}$$



ধাপ ২: ডিস্কদ্বয়ের জড়তার ভ্রামক (Moment of Inertia) নির্ণয়

- ডিস্ক ১: $I_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times (0.3)^2 = \mathbf{0.18}$ kg m^2
- ডিস্ক ২: $I_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (0.2)^2 = \mathbf{0.04}$ kg m^2

ধাপ ৩: আপেক্ষিক গতি বন্ধ হওয়ার সময়কাল (t) নির্ণয়

ডিস্ক ১-এর আদি বেগ ধনাত্মক ($\omega_1 = 20$ rad/s) এবং ডিস্ক ২-এর আদি বেগ ঋণাত্মক ($\omega_2 = -10$ rad/s) ধরে নিই। ঘর্ষণজনিত টর্ক প্রতিটি ডিস্কের গতির বিপরীতে কাজ করবে।

- ডিস্ক ১-এর কৌণিক ত্বরণ ও বেগ:

$$\alpha_1 = -\frac{\tau_f}{I_1} = -\frac{2.4}{0.18} = -\frac{40}{3} \text{ rad/s}^2 \implies \omega_1(t) = 20 - \frac{40}{3}t$$

- ডিস্ক ২-এর কৌণিক ত্বরণ ও বেগ:

$$\alpha_2 = +\frac{\tau_f}{I_2} = +\frac{2.4}{0.04} = +60 \text{ rad/s}^2 \implies \omega_2(t) = -10 + 60t$$

যখন আপেক্ষিক পিছলানো বন্ধ হবে, তখন উভয় ডিস্কের কৌণিক বেগ সমান হবে ($\omega_1(t) = \omega_2(t)$):

$$\begin{aligned} 20 - \frac{40}{3}t &= -10 + 60t \\ 30 &= \left(60 + \frac{40}{3}\right)t = \frac{220}{3}t \\ t &= \frac{90}{220} = \frac{9}{22} \approx \mathbf{0.409} \text{ s} \end{aligned}$$

ধাপ ৪: উৎপন্ন তাপশক্তি (ΔE) নির্ণয়

উভয় ডিস্কের চূড়ান্ত সাধারণ কৌণিক বেগ (ω_f):

$$\omega_f = -10 + 60\left(\frac{9}{22}\right) = -10 + \frac{270}{11} = \frac{160}{11} \approx 14.545 \text{ rad/s}$$

- প্রাথমিক মোট গতিশক্তি (K_i):

$$K_i = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}(0.18)(20)^2 + \frac{1}{2}(0.04)(-10)^2 = 36 + 2 = \mathbf{38}\ \text{J}$$

- চূড়ান্ত মোট গতিশক্তি (K_f):

$$K_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \frac{1}{2}(0.18 + 0.04)\left(\frac{160}{11}\right)^2 = 0.11 \times \frac{25600}{121} = \frac{256}{11} \approx \mathbf{23.273}\ \text{J}$$

উৎপন্ন তাপশক্তি (গতিশক্তির অপচয়, নেট পরিবর্তন ΔE):

$$\Delta E = K_i - K_f = 38 - \frac{256}{11} = \frac{418 - 256}{11} = \frac{162}{11} \approx \mathbf{14.73}\ \text{J}$$

চূড়ান্ত উত্তর:
ডিস্ক দুটির আপেক্ষিক পিছলানো বন্ধ হতে প্রায় **0.409** s সময় লাগবে এবং এই প্রক্রিয়ায় মোট **14.73** J তাপশক্তি উৎপন্ন হবে।

প্রশ্ন (Question) 10

5×10^3 kg ভরের একটি ব্লককে 30° নতকোণের একটি অমসৃণ আনত তলের পাদদেশ থেকে তলের ঊর্ধ্বমুখী বরাবর ঠেলে দেওয়া হলো। যদি ব্লকটির ওপরের দিকে উঠতে যে সময় লাগে, আনত তল বেয়ে নিচে নামতে তার দ্বিগুণ সময় লাগে, তবে ব্লক ও আনত তলের মধ্যবর্তী গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক (μ_k) কত?

A block of mass 5×10^3 kg is pushed up a rough inclined plane of inclination 30°. If the time taken for the block to slide down the plane is twice the time taken to slide up, what is the coefficient of kinetic friction (μ_k) between the block and the plane?

সমাধান (Solution)

ধরি, আনত তলের দৈর্ঘ্য s এবং ব্লকের ভর $m = 5 \times 10^3$ kg।

ধাপ ১: ওপরে ওঠার সময় ও মন্দন নির্ণয়
যখন ব্লকটিকে তলের পাদদেশ থেকে ওপরের দিকে ছুড়ে দেওয়া হয়, তখন এর গতির বিপরীতে দুটি বল কাজ করে:

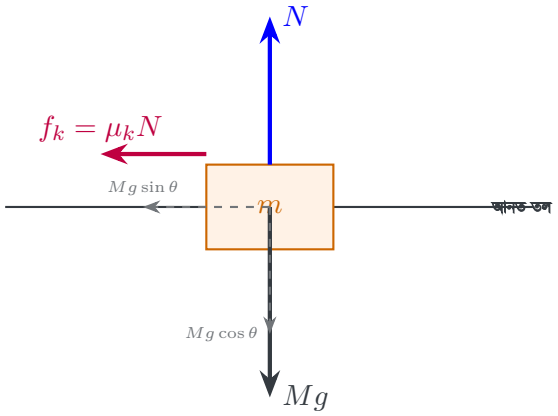
1. ওজনের সমান্তরাল উপাংশ: $mg\sin\theta$ (নিচের দিকে)
2. গতিশীল ঘর্ষণ বল: $f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$ (নিচের দিকে)

ফলে ওপরের দিকে ওঠার সময় ব্লকের ওপর ক্রিয়াশীল মন্দন (a_1):

$$a_1 = g\sin\theta + \mu_k g\cos\theta$$

যেহেতু ব্লকটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছে ক্ষণিকের জন্য স্থির অবস্থায় পৌঁছায় ($v = 0$), তাই গতির সমীকরণ $s = ut_1 - \frac{1}{2}a_1t_1^2$-এর পরিবর্তে সর্বোচ্চ সরণের ক্ষেত্রে লেখা যায়:

$$s = \frac{1}{2}a_1t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} \quad \text{--- (১)}$$



ধাপ ২: নিচে নামার সময় ও ত্বরণ নির্ণয়

যখন ব্লকটি নিচের দিকে নামতে শুরু করে, তখন ওজন নিচের দিকে টানে কিন্তু ঘর্ষণ বল গতির বিপরীতে অর্থাৎ ওপরের দিকে কাজ করে। ফলে নিচের দিকে নামার সময় ত্বরণ (a_2):

$$a_2 = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

পাদদেশে ফিরে আসার সময় সরণের সমীকরণ থেকে পাই:

$$s = \frac{1}{2}a_2t_2^2 \implies t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} \quad \text{--- (২)}$$

ধাপ ৩: সময়ের অনুপাত ও ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয়

প্রশ্নানুসারে, নিচে নামার সময় উপরে ওঠার সময়ের দ্বিগুণ, অর্থাৎ $t_2 = 2t_1$। সমীকরণ (১) ও (২) থেকে মান বসিয়ে পাই:

$$\sqrt{\frac{2s}{a_2}} = 2\sqrt{\frac{2s}{a_1}}$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই:

$$\frac{2s}{a_2} = 4\left(\frac{2s}{a_1}\right) \implies a_1 = 4a_2$$

এখন a_1 এবং a_2-এর মান প্রতিস্থাপন করি:

$$g\sin\theta + \mu_k g\cos\theta = 4(g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta)$$

উভয়পক্ষ থেকে g বাদ দিয়ে সরল করি:

$$\sin\theta + \mu_k\cos\theta = 4\sin\theta - 4\mu_k\cos\theta$$

$$\mu_k\cos\theta + 4\mu_k\cos\theta = 4\sin\theta - \sin\theta$$

$$5\mu_k\cos\theta = 3\sin\theta \implies \mu_k = \frac{3}{5}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{3}{5}\tan\theta$$

ধাপ ৪: মান বসিয়ে চূড়ান্ত গণনা

এখানে আনত কোণ $\theta = 30^\circ$।

$$\mu_k = \frac{3}{5}\tan 30^\circ = 0.6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{0.6}{1.732} \approx \mathbf{0.346}$$

(উল্লেখ্য যে ব্লকের ভর $m = 5 \times 10^3$ kg এখানে গাণিতিকভাবে কাটাকাটি হয়ে যায়, ফলে তা ঘর্ষণ গুণাঙ্কের মানের ওপর প্রভাব ফেলে না।)

চূড়ান্ত উত্তর:

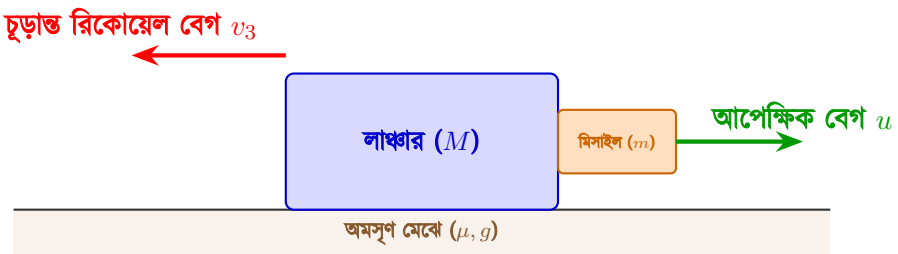
ব্লক ও আনত তলের মধ্যবর্তী গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক (μ_k) হলো **0.346**।

প্রশ্ন (Question) 11

M ভরের একটি মিসাইল লাঞ্চার একটি অমসৃণ অনুভূমিক মেঝের ওপর স্থির অবস্থায় রাখা আছে, যার মেঝেতে পিছলানোর গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ। লাঞ্চারটিতে প্রতিটি m ভরের তিনটি অভিন্ন মিসাইল লোড করা আছে। লাঞ্চারটি থেকে প্রথম মিসাইলটি স্থির অবস্থা থেকে অনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হয় এবং পরবর্তী মিসাইলগুলো অত্যন্ত অল্প সময়ের ব্যবধানে (নান্যোসেকেন্ড ব্যবধানে) একে একে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হয় যাতে শটগুলোর মাঝে লাঞ্চারটি থামার কোনো সুযোগ পায় না; অর্থাৎ প্রতিটি পরবর্তী শটের সময় লাঞ্চারটি তার পূর্ববর্তী শট থেকে প্রাপ্ত বেগের সাথে যুক্ত হয়ে গতিশীল থাকে।

প্রতিটি মিসাইল নিক্ষেপের সময় লাঞ্চারের সাপেক্ষে ধ্রুবক u আপেক্ষিক বেগে সামনের দিকে বের হয়ে যায়। তৃতীয় (শেষ) মিসাইলটি নিক্ষেপ করার পর লাঞ্চারটিতে আর কোনো মিসাইল না থাকায় এটি মেঝের ওপর পিছলে কতটুকু দূরত্ব (d_3) অতিক্রম করে সম্পূর্ণ থেমে যাবে তার একটি সরলীকৃত প্রতীকী রাশিমালা প্রতিপাদন করো। [অভিকর্ষজ ত্বরণ g]

A missile launcher of mass M is placed at rest on a rough horizontal floor with a coefficient of kinetic friction μ. The launcher is loaded with three identical missiles, each of mass m. The first missile is launched from rest, and the subsequent missiles are fired in rapid succession with negligible time gaps (nanoseconds apart), meaning the launcher does not come to rest between shots and accumulates recoil velocity. During each launch, the missile is ejected forward with a constant velocity u relative to the launcher. Derive a symbolic expression for the sliding distance (d_3) the empty launcher travels on the rough floor before coming to a complete stop after the third shot. [Acceleration due to gravity g]



সমাধান (Solution)

আমরা ডান দিককে ধনাত্মক ($+x$) এবং বাম দিককে ঋণাত্মকিন ($-\hat{i}$) দিক হিসেবে বিবেচনা করি। মিসাইলগুলো ডান দিকে এবং লাঞ্চারটি ক্রমান্বয়ে বাম দিকে রিকোয়েল বেগ অর্জন করতে থাকবে।

ধাপ ১: ধারাবাহিক শটগুলোর মাধ্যমে রিকোয়েল বেগ নির্ণয়

শুরুতে লাঞ্চার এবং ৩টি মিসাইলের সমন্বিত মোট ভর ছিল $(M+3m)$ এবং আদি বেগ শূন্য ($v_0 = 0$)।

1. **প্রথম শট (প্রারম্ভে স্থির অবস্থা থেকে):** প্রথম মিসাইলটি যখন নিক্ষিপ্ত হয়, তখন ব্যবস্থার ভর থাকে $(M+3m)$। ভরবেগের সংরক্ষণশীলতা অনুসারে প্রথম শটের পর লাঞ্চার ও অবশিষ্ট ২টি মিসাইলের

অর্জিত বেগ (v_1):

$$0 = (M + 2m)(-v_1) + m(u - v_1) \implies v_1 = \frac{mu}{M + 3m}$$

2. **দ্বিতীয় শট (গতিশীল অবস্থা থেকে):** দ্বিতীয় শটের ঠিক পূর্বে ব্যবস্থাটি $-v_1$ বেগে গতিশীল থাকে। দ্বিতীয় মিসাইলটি নির্গত হওয়ার পর লাঞ্চার ও অবশিষ্ট ১টি মিসাইলের ভর হয় $(M + m)$ এবং নতুন বেগ হয় v_2:

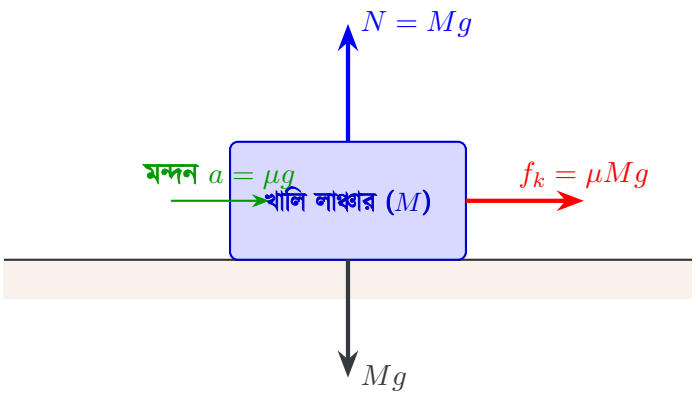
$$(M + 2m)(-v_1) = (M + m)(-v_2) + m(u - v_2) \implies v_2 = v_1 + \frac{mu}{M + 2m}$$

3. **তৃতীয় শট (চূড়ান্ত শট):** তৃতীয় শটের পূর্বে ব্যবস্থাটি $-v_2$ বেগে গতিশীল থাকে। তৃতীয় মিসাইলটি নির্গত হওয়ার পর কেবল খালি লাঞ্চারটি (ভর M) অবশিষ্ট থাকে এবং এর চূড়ান্ত রিকোয়েল বেগ (v_3) দাঁড়ায়:

$$(M + m)(-v_2) = M(-v_3) + m(u - v_3) \implies v_3 = v_2 + \frac{mu}{M + m}$$

তিনটি শটের সম্মিলিত ফলাফল থেকে খালি লাঞ্চারের চূড়ান্ত রিকোয়েল বেগ (v_3):

$$v_3 = mu\left(\frac{1}{M + 3m} + \frac{1}{M + 2m} + \frac{1}{M + m}\right) \quad \text{--- (১)}$$



ধাপ ২: তৃতীয় শটের পর পিছলে অতিক্রান্ত দূরত্ব (d_3) নির্ণয়

তৃতীয় শট সম্পন্ন হওয়ার পর লাঞ্চারে কোনো মিসাইল না থাকায় কেবল লাঞ্চারের ভর M মেঝের ওপর পিছলে চলতে থাকে।

- লাঞ্চারের ওপর মেঝের উল্লম্ব অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল: $N = Mg$
- গতিশীল ঘর্ষণ বল: নৈকট্য রক্ষার্থে $f_k = \mu N = \mu Mg$

- ঘর্ষণ বলের কারণে সৃষ্ট রৈখিক মন্দন (a):

$$a = \frac{f_k}{M} = \mu g$$

লাঞ্চারটি v_3 আদি বেগ নিয়ে পিছলানো শুরু করে এবং $d_3(\mathrm{v_{stop}} = 0)$। গতির সূত্র থেকে পাই:

$$v_{\text{stop}}^2 = v_3^2 - 2ad_3 \implies 0 = v_3^2 - 2(\mu g)d_3 \implies d_3 = \frac{v_3^2}{2\mu g}$$

সমীকরণ (১) থেকে প্রাপ্ত v_3-এর মান প্রতিস্থাপন করে অতিক্রান্ত দূরত্বের চূড়ান্ত প্রতীকী রূপ পাই:

$$\mathbf{d_3 = \frac{m^2u^2}{2\mu g}\left(\frac{1}{M+3m} + \frac{1}{M+2m} + \frac{1}{M+m}\right)^2}$$

চূড়ান্ত উত্তর:
তৃতীয় শটের পর লাঞ্চারটির পিছনের দিকে পিছলে যাওয়ার দূরত্ব হবে:

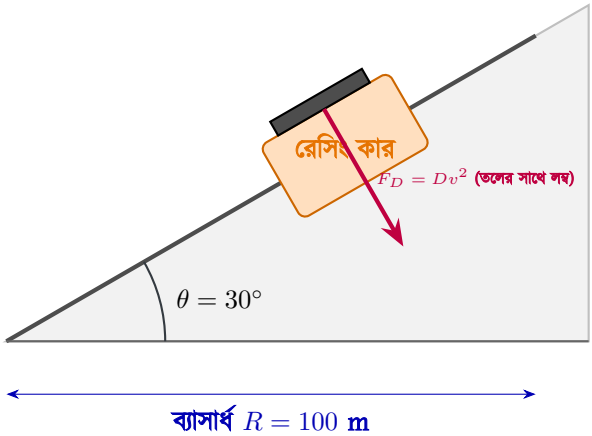
$$\mathbf{d_3 = \frac{m^2u^2}{2\mu g}\left(\frac{1}{M+3m} + \frac{1}{M+2m} + \frac{1}{M+m}\right)^2}$$

প্রশ্ন (Question) 12

100 m ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার বাঁকে একটি রাস্তা অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ব্যাংকিং করা আছে। রাস্তা ও গাড়ির চাকার মধ্যবর্তী স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.4। 1000 kg ভরের একটি রেসিং কারে অ্যারোডাইনামিক ডাউনফোর্স বাড়ানোর জন্য একটি স্পয়লার যুক্ত করা আছে, যা রাস্তার **তলের সাথে লম্বভাবে নিচের দিকে** $F_D = Dv^2$ মানের বল প্রয়োগ করে ($D = 1.0$ kg/m)।

গাড়িটি যাতে বাঁক নেওয়ার সময় রাস্তার তলের সমান্তরালে ওপরের দিকে পিছলে না যায়, তার জন্য গাড়িটির সর্বোচ্চ নিরাপদ গতিবেগ (v_{max}) নির্ণয় করো। [Take $g = 9.8$ m/s^2]

A circular curved road of radius $R = 100$ m is banked at an angle $\theta = 30^\circ$ to the horizontal. The coefficient of static friction is $\mu_s = 0.4$. A racing car of mass $m = 1000$ kg has a spoiler exerting a downward force perpendicular to the track surface given by $F_D = Dv^2$ ($D = 1.0$ kg/m). Calculate the maximum safe velocity (v_{max}) without sliding upward. [Take $g = 9.8$ m/s^2]



সমাধান (Solution)

প্রদত্ত মানসমূহ:

- বাঁকের ব্যাসার্ধ, $R = 100$ m
- ব্যাংকিং কোণ, $\theta = 30°$ ($\sin 30° = 0.5, \cos 30° \approx 0.866025$)
- স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক, $\mu_s = 0.4$
- গাড়ির ভর, $m = 1000$ kg
- অ্যারোডাইনামিক ধ্রুবক, $D = 1.0$ kg/m
- অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ m/s^2

ধাপ ১: বলের সঠিক উপাংশ বিশ্লেষণ ও সমীকরণ গঠন

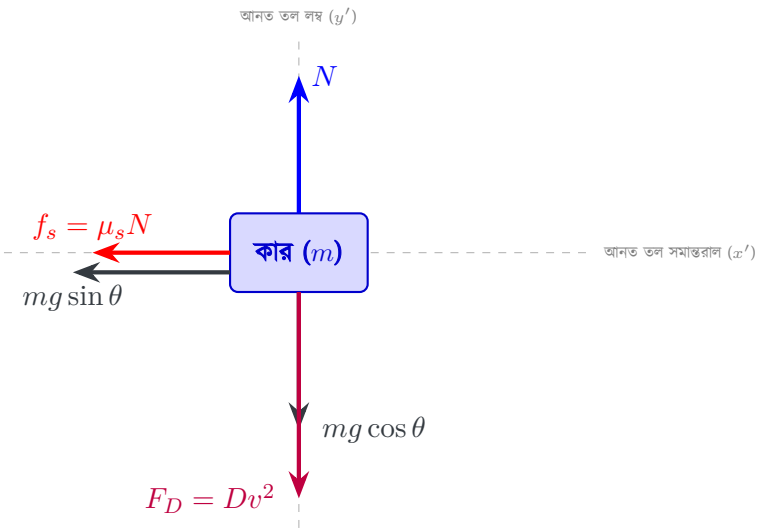
গাড়িটির সর্বোচ্চ গতিবেগের ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল ($f_s = \mu_s N$) আনত তল বরাবর **নিচের দিকে** কাজ করে। যেহেতু ডাউনফোর্স $F_D = Dv^2$ রাস্তার তলের সাথে লম্বভাবে নিচের দিকে কাজ করে, তাই এটি অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল N-এর সাপেক্ষে আনত তলের লম্ব অক্ষ বরাবর (y' অক্ষে) কাজ করে।
আনত তলের লম্ব ও সমান্তরাল অক্ষ বরাবর বলগুলোর উপাংশ বিন্যাস:

- **তলের লম্ব বরাবর সাম্যাবস্থা ($\Sigma F_{y'} = 0$):**

$$N - mg\cos\theta - F_D = 0 \implies N = mg\cos\theta + Dv^2$$

- **কেন্দ্রমুখী বলের সমীকরণ ($\Sigma F_{x'} = \frac{mv^2}{R}$):**

$$f_s + mg\sin\theta = \frac{mv_{\text{max}}^2}{R} \implies \mu_s N + mg\sin\theta = \frac{mv_{\text{max}}^2}{R}$$



ধাপ ২: গাণিতিক প্রতিপাদন ও হিসাব

সমীকরণগুলো সমাধান করে সর্বোচ্চ বেগের রাশিমালাটি পাই:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{R\left[mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)\right]}{m(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) - DR}}$$

প্রদত্ত মানগুলো বসিয়ে পাই:

- **লব (Numerator):**

$$\text{Num} = 100 \times 1000 \times 9.8 \times (0.5 + 0.4 \times 0.866025) = 829,481.8$$

- **হর (Denominator):**

$$\text{Denom} = 1000 \times (0.866025 - 0.4 \times 0.5) - (1.0 \times 100) = 666.025 - 100 = 566.025$$

অতএব, সর্বোচ্চ নিরাপদ বেগ:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{829,481.8}{566.025}} = \sqrt{1465.45} \approx \mathbf{38.28}\ \text{m/s} \quad (\approx 137.8\ \text{km/h})$$

চূড়ান্ত উত্তর:

সঠিক উপাংশ বিশ্লেষণ ও নির্দেশিত চিত্র অনুযায়ী রেসিং কারটির সর্বোচ্চ নিরাপদ গতিবেগ হলো:

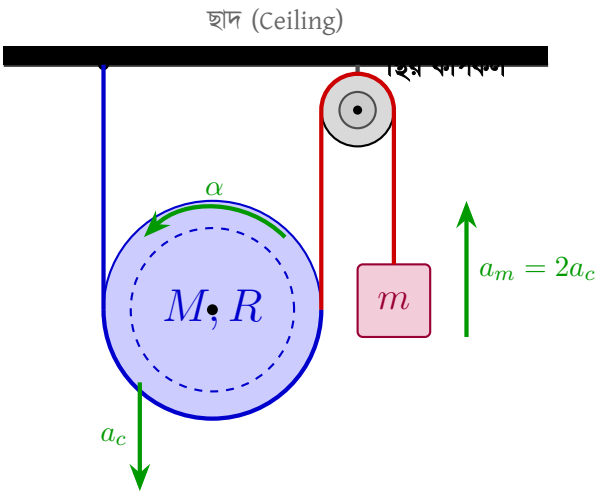
$$\mathbf{v}_{\text{max}} = \mathbf{38.28}\ \text{m/s} \quad (\approx 137.8\ \text{km/h})$$

প্রশ্ন (Question) 13

M ভর এবং R ব্যাসার্ধের একটি নিরেট সুষম সিলিন্ডার একটি গতিশীল কপিকল (movable pulley) হিসেবে কাজ করে। সিলিন্ডারের ওপর একটি হালকা সুতা জড়ানো আছে যার এক প্রান্ত সিলিংয়ের সাথে আটকানো। সুতাটি সিলিন্ডারের নিচ দিয়ে ঘুরে ওপরের দিকে উঠে একটি স্থির ঘর্ষণহীন কপিকলের ওপর দিয়ে গিয়ে অপর প্রান্তে m ভরের একটি ঝুলন্ত ব্লকের সাথে সংযুক্ত।

সিলিন্ডারটি যখন নিচের দিকে পড়তে শুরু করে, তখন সুতাটি সিলিন্ডারের ওপর না পিছলে এটি ঘুরতে থাকে। অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে, সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রের নিম্নমুখী রৈখিক ত্বরণ (a_c)-এর একটি সরলীকৃত প্রতীকী রাশিমালা প্রতিপাদন করো। (নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{2}MR^2$)।

A uniform solid cylinder of mass M and radius R acts as a movable pulley. A light string is wrapped around the cylinder with one end anchored to the ceiling. The string goes under the cylinder, wraps around it, goes vertically up over a fixed frictionless pulley, and is attached to a hanging block of mass m at the other end. As the cylinder falls, the string unwinds without slipping. If the acceleration due to gravity is g, derive a simplified symbolic expression for the downward linear acceleration (a_c) of the center of mass of the cylinder. (The moment of inertia of a solid cylinder is $I = \frac{1}{2}MR^2$).



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: কাইনেম্যাটিক্স (Kinematics) ও ত্বরণের সম্পর্ক

ধরি, সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রের নিম্নমুখী রৈখিক ত্বরণ a_c এবং এর কৌণিক ত্বরণ α। যেহেতু সিলিংয়ের সাথে যুক্ত বাম পাশের সুতাটি স্থির, তাই সিলিন্ডারের বাম প্রান্তের স্পর্শবিন্দুটির তাৎক্ষণিক বেগ ও ত্বরণ

শূন্য হবে (no-slip condition):

$$a_c = R\alpha \implies \alpha = \frac{a_c}{R}$$

সিলিন্ডারটি বাম সুতার সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (CCW) ঘোরে। ফলে ডান প্রান্তের স্পর্শবিন্দুর ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ সিলিন্ডারের কেন্দ্র এবং ঘূর্ণনের কারণে দ্বিগুণ হবে:

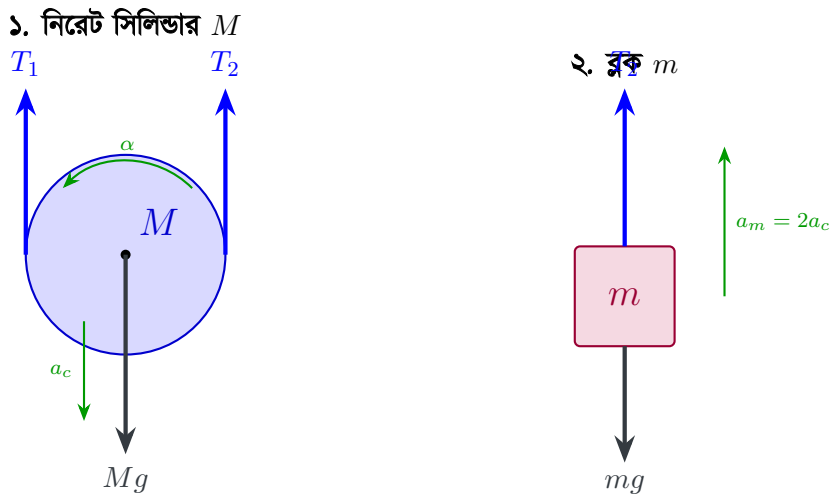
$$a_{\text{right}} = a_c + R\alpha = a_c + a_c = 2a_c$$

যেহেতু ডান পাশের সুতাটিই স্থির কপিকল ঘুরে m ব্লকের সাথে যুক্ত, তাই m ব্লকের ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ হবে:

$$a_m = 2a_c$$

ধাপ ২: মুক্ত বস্তু চিত্র (FBD) ও গতির সমীকরণ গঠন

ধরি, সিলিংয়ের পাশের (বাম দিকের) সুতার টান T_1 এবং ঝুলন্ত ব্লকের পাশের (ডান দিকের) সুতার টান T_2।



উপরোক্ত FBD থেকে নিউটনের ২য় সূত্র প্রয়োগ করে পাই:

1. **সিলিন্ডারের রৈখিক গতির সমীকরণ (নিচের দিকে):**

$$Mg - T_1 - T_2 = Ma_c \quad \text{--- (১)}$$

2. **সিলিন্ডারের ঘূর্ণন গতির সমীকরণ (ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে):** যেহেতু সিলিন্ডারটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (CCW) ঘোরে, T_1 টর্ক সৃষ্টি করে CCW দিকে এবং T_2 টর্ক সৃষ্টি করে CW দিকে।

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha$$

যেহেতু নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{2}MR^2$ এবং $\alpha = \frac{a_c}{R}$:

$$(T_1 - T_2)R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a_c}{R}\right) \implies T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma_c \quad \text{--- (২)}$$

3. **ঝুলন্ত ব্লকের গতির সমীকরণ (ওপরের দিকে):**

$$T_2 - mg = ma_m = m(2a_c) \implies T_2 = mg + 2ma_c \quad \text{--- (৩)}$$

ধাপ ৩: সমীকরণ সমাধান ও ত্বরণ নির্ণয়

সমীকরণ (১) এবং (২) যোগ করে পাই:

$$(Mg - T_1 - T_2) + (T_1 - T_2) = Ma_c + \frac{1}{2}Ma_c$$

$$Mg - 2T_2 = \frac{3}{2}Ma_c$$

এখন সমীকরণ (৩) থেকে T_2-এর মান এখানে প্রতিস্থাপন করি:

$$Mg - 2(mg + 2ma_c) = \frac{3}{2}Ma_c$$

$$Mg - 2mg - 4ma_c = \frac{3}{2}Ma_c$$

a_c-যুক্ত পদগুলোকে একপাশে নিয়ে পাই:

$$g(M - 2m) = a_c\left(\frac{3}{2}M + 4m\right)$$

$$g(M - 2m) = a_c\left(\frac{3M + 8m}{2}\right)$$

$$a_c = \frac{2g(M - 2m)}{3M + 8m}$$

চূড়ান্ত উত্তর:

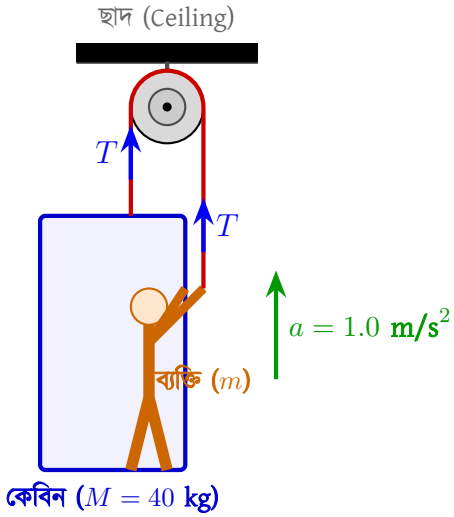
সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রের নিম্নমুখী রৈখিক ত্বরণের সরলীকৃত প্রতীকী রাশিমালাটি হলো:

$$\mathbf{a_c = \frac{2g(M - 2m)}{3M + 8m}}$$

প্রশ্ন (Question) 14

$m = 80$ kg ভরের একজন ব্যক্তি $M = 40$ kg ভরের একটি ঝুলন্ত কেবিনের ভেতরে দাঁড়িয়ে আছেন। কেবিনটি একটি হালকা সুতার সাহায্যে ছাদের একটি ঘর্ষণহীন কপিকলের ওপর দিয়ে ঝোলানো এবং সুতার অপর প্রান্তটি ব্যক্তিটি নিজে হাত দিয়ে ধরে রেখেছেন। ব্যক্তিটি সুতাটিকে এমন একটি বলে নিচের দিকে টানলেন যাতে কেবিনসহ তিনি নিজে খাড়া উপরের দিকে $a = 1.0$ m/s^2 ত্বরণে আরোহণ করেন। এই অবস্থায় কেবিনের মেঝে ব্যক্তিটির পায়ের ওপর কত অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল (normal reaction force) প্রয়োগ করবে তা নির্ণয় করো। [Take $g = 9.8$ m/s^2]

A man of mass $m = 80$ kg stands inside a cabin of mass $M = 40$ kg. The cabin is suspended by a light rope that goes over a frictionless pulley, and the other end of the rope is held by the man himself. The man pulls the rope with such a force that the cabin and he accelerate upwards at $a = 1.0$ m/s^2. Calculate the normal reaction force exerted by the floor of the cabin on the man's feet. [Take $g = 9.8$ m/s^2]



সমাধান (Solution)

প্রদত্ত মানসমূহ:

- ব্যক্তির ভর, $m = 80$ kg
- কেবিনের ভর, $M = 40$ kg
- ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ, $a = 1.0$ m/s^2
- অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ m/s^2

ধাপ ১: সুতার টান (T) নির্ণয় (সমগ্র ব্যবস্থা বিবেচনা করে)

সমগ্র ব্যবস্থাটিকে (ব্যক্তি + কেবিন) একটি একক সিস্টেম হিসেবে বিবেচনা করি। সিস্টেমের মোট ভর,

$M_{\text{tot}} = m + M = 80 + 40 = 120$ kg। ব্যক্তিটি সুতাকে T বলে টানলে, নিউটনের ৩য় সূত্রানুযায়ী সুতাটি ব্যক্তিকে উপরের দিকে T বলে টানবে। একই সাথে সুতার অপর প্রান্ত কেবিনের ছাদটিকেও উপরের দিকে T বলে টানবে। সুতরাং, সিস্টেমের ওপর মোট ঊর্ধ্বমুখী বল = $2T$ এবং মোট নিম্নমুখী ওজন = $(m + M)g$।

গতির সমীকরণ:

$$2T - (m + M)g = (m + M)a$$

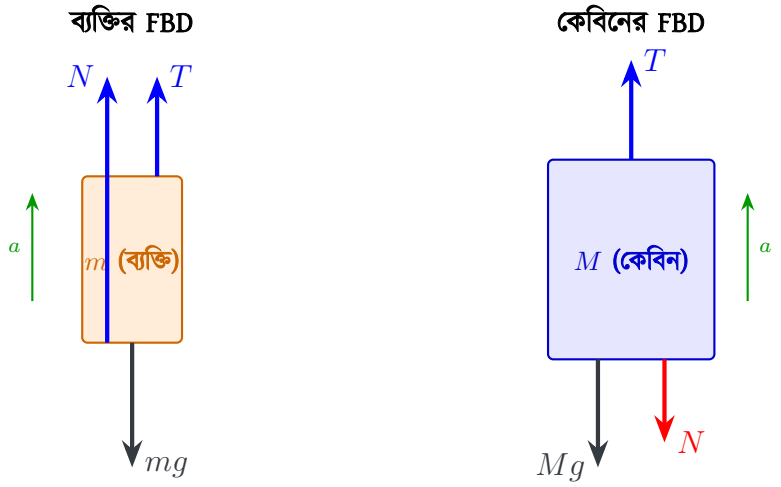
$$2T = (m + M)(g + a)$$

$$2T = 120 \times (9.8 + 1.0) = 120 \times 10.8 = 1296 \text{ N}$$

$$T = 648 \text{ N}$$

ধাপ ২: নিউটনের ৩য় সূত্র ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া (N) নির্ণয়

ব্যক্তির পায়ের ওপর কেবিনের মেঝের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল N উপরের দিকে কাজ করে। নিউটনের ৩য় সূত্রানুযায়ী, ব্যক্তিটিও কেবিনের মেঝের ওপর সমান ও বিপরীতমুখী বল N নিচের দিকে প্রয়োগ করেন।



শুধুমাত্র ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বলের বিশ্লেষণ (ব্যক্তির FBD) করে পাই:

- **ঊর্ধ্বমুখী বল:** সুতার টান T এবং মেঝের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া N
- **নিম্নমুখী বল:** ব্যক্তির নিজস্ব ওজন mg

ব্যক্তির গতির সমীকরণ:

$$T + N - mg = ma$$

$$648 + N - (80 \times 9.8) = 80 \times 1.0$$

$$648 + N - 784 = 80$$

$$N - 136 = 80 \implies N = 136 + 80 = \mathbf{216}\ \text{N}$$

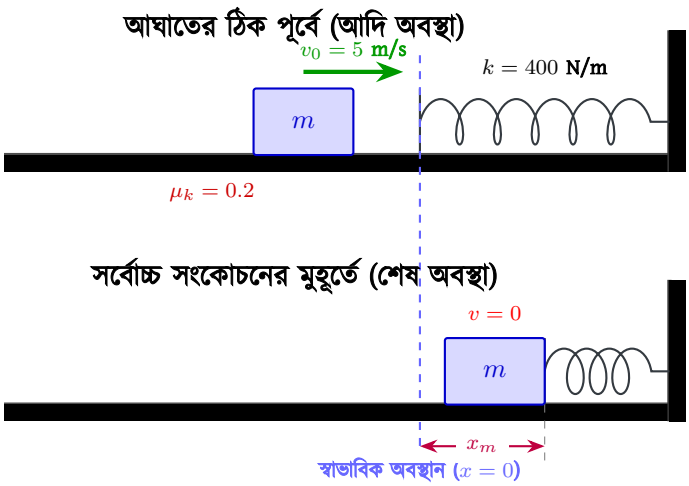
(যাচাই: কেবিনের FBD থেকে সমীকরণটি হলো $T - N - Mg = Ma \implies 648 - N - (40 \times 9.8) = 40 \times 1.0 \implies 648 - N - 392 = 40 \implies 256 - N = 40 \implies N = 216$ N, যা সম্পূর্ণ সামঞ্জস্যপূর্ণ।)

চূড়ান্ত উত্তর:
কেবিনের মেঝে কর্তৃক ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বলের মান হলো **216** N।

প্রশ্ন (Question) 15

2 kg ভরের একটি ব্লক একটি অনুভূমিক মেঝের ওপর $v_0 = 5$ m/s আদি বেগে গতিশীল থাকা অবস্থায় মেঝেতে দৃঢ়ভাবে আটকানো $k = 400$ N/m স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিংকে আঘাত করে। মেঝে ও ব্লকের মধ্যকার গতিশীল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_k = 0.2$ এবং স্প্রিংটি শুরুতে তার স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যে থাকলে, আঘাতের ফলে স্প্রিংটির সর্বোচ্চ সংকোচন (maximum compression) কত হবে তা নির্ণয় করো। [Take $g = 9.8$ m/s^2]

A block of mass 2 kg moving with an initial speed of $v_0 = 5$ m/s on a horizontal floor strikes a horizontally mounted spring of spring constant $k = 400$ N/m. If the coefficient of kinetic friction between the floor and the block is $\mu_k = 0.2$ and the spring is initially at its natural length, calculate the maximum compression of the spring during the collision. [Take $g = 9.8$ m/s^2]



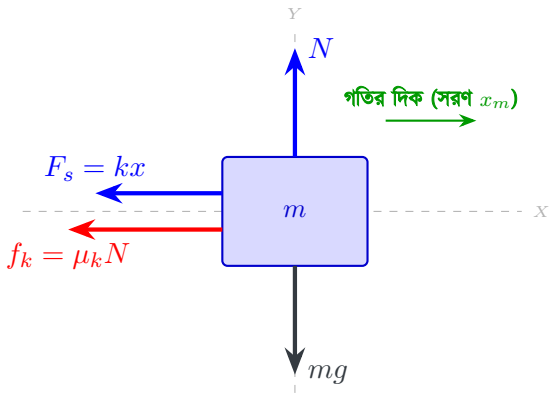
সমাধান (Solution)

ব্লকটি যখন স্প্রিংটিকে আঘাত করে সংকুচিত করতে থাকে, তখন স্প্রিং বলের পাশাপাশি অসংরক্ষণশীল গতিশীল ঘর্ষণ বলও ব্লকের গতির বিরুদ্ধে কাজ করে। কাজ-শক্তি উপপাদ্য (Work-Energy Theorem) অনুসারে, ব্লকের গতিশক্তির পরিবর্তন স্প্রিং বল এবং ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজের সমষ্টির সমান:

$$W_{\text{net}} = \Delta K$$

ধাপ ১: মুক্ত বস্তু চিত্র (FBD) ও বল বিশ্লেষণ

সংকোচন চলাকালীন ব্লকের ওপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ হলো:



ধাপ ২: কাজ ও শক্তির মান নির্ণয়

ধরি, স্প্রিংটির সর্বোচ্চ সংকোচন x_m। সর্বোচ্চ সংকোচনের মুহূর্তে ব্লকের শেষ বেগ হবে শূন্য ($v = 0$)।

- **গতিশক্তির পরিবর্তন (ΔK):**

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}(2)(5^2) = -25 \text{ J}$$

- **সংরক্ষণশীল স্প্রিং বল দ্বারা কৃতকাজ (W_{spring}):** স্প্রিং বল সরণের বিপরীত দিকে কাজ করায় কাজ ঋণাত্মক হবে।

$$W_{\text{spring}} = -\frac{1}{2}kx_m^2 = -\frac{1}{2}(400)x_m^2 = -200x_m^2$$

- **অসংরক্ষণশীল ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজ (W_{friction}):** ঘর্ষণ বলও সরণের বিপরীতে কাজ করে। উল্লম্ব সাম্যাবস্থা থেকে $N = mg$।

$$W_{\text{friction}} = -f_k \cdot x_m = -(\mu_k mg)x_m = -(0.2 \times 2 \times 9.8)x_m = -3.92x_m$$

ধাপ ৩: কাজ-শক্তি সমীকরণ গঠন ও সমাধান

মানগুলো কাজ-শক্তি সমীকরণে ($W_{\text{spring}} + W_{\text{friction}} = \Delta K$) বসিয়ে পাই:

$$-200x_m^2 - 3.92x_m = -25$$

$$200x_m^2 + 3.92x_m - 25 = 0$$

এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধনাত্মক মূলটি হিসাব করে পাই:

$$x_m = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3.92 + \sqrt{(3.92)^2 - 4(200)(-25)}}{2(200)}$$

$$x_m = \frac{-3.92 + \sqrt{15.37 + 20000}}{400} = \frac{-3.92 + \sqrt{20015.37}}{400}$$

$$x_m = \frac{-3.92 + 141.48}{400} = \frac{137.56}{400} \approx \mathbf{0.344}\ \text{m}$$

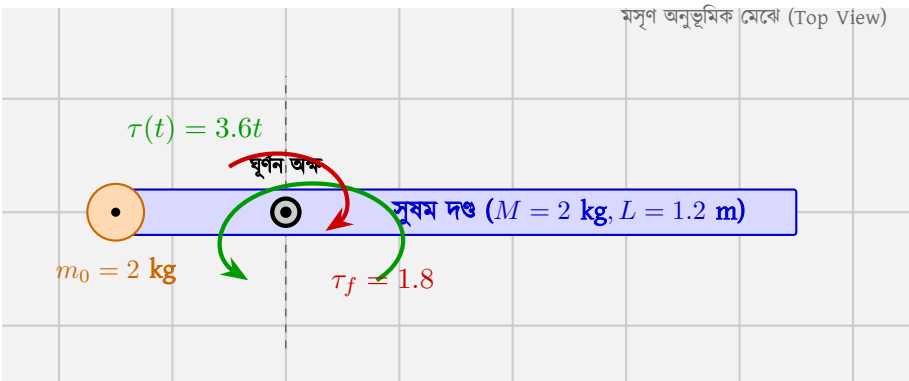
চূড়ান্ত উত্তর:
স্প্রিংটির সর্বোচ্চ সংকোচন হবে প্রায় $\mathbf{0.344}$ m বা $\mathbf{34.4}$ cm।

প্রশ্ন (Question) 16

$M = 2$ kg ভর এবং $L = 1.2$ m দৈর্ঘ্যের একটি সুষম সরু দণ্ড (rod) একটি মসৃণ অনুভূমিক মেঝের ওপর রাখা আছে। দণ্ডটি তার এক প্রান্ত থেকে 0.3 m দূরে অবস্থিত একটি খাড়া উল্লম্ব অক্ষের (vertical axis) সাপেক্ষে অনুভূমিক তলে ঘুরতে পারে। দণ্ডটির কাছাকাছি প্রান্তে (যে প্রান্তটি অক্ষ থেকে 0.3 m দূরে) $m_0 = 2$ kg ভরের একটি ক্ষুদ্র গোলক (বিন্দু ভর) দৃঢ়ভাবে আটকে দেওয়া হলো।

অক্ষটিতে ঘূর্ণন প্রতিরোধকারী একটি ধ্রুব ঘর্ষণ টর্ক $\tau_f = 1.8$ N $\cdot$ m কাজ করে। এবার স্থির অবস্থা থেকে দণ্ডটির ওপর একটি পরিবর্তনশীল ঘূর্ণন টর্ক $\tau(t) = 3.6t$ N $\cdot$ m প্রয়োগ করা হলো (যেখানে t হলো সেকেন্ড এককে সময়)। ঘূর্ণন শুরু করার পর থেকে $t = 2.5$ s মুহূর্তে দণ্ডটির অর্জিত আবর্তনজনিত গতিশক্তি (rotational kinetic energy) কত হবে তা নির্ণয় করো।

A uniform thin rod of mass $M = 2$ kg and length $L = 1.2$ m lies on a smooth horizontal floor. The rod is pivoted to rotate horizontally about a vertical axis passing through a point 0.3 m from one of its ends. A small sphere (point mass) of mass $m_0 = 2$ kg is rigidly attached to the near end of the rod (which is 0.3 m from the axis). A constant frictional torque of $\tau_f = 1.8$ $N \cdot m$ opposes the rotation at the pivot. Starting from rest, a time-varying torque of $\tau(t) = 3.6t$ $N \cdot m$ is applied to the rod (where t is the time in seconds). Calculate the rotational kinetic energy of the system at the moment $t = 2.5$ s.

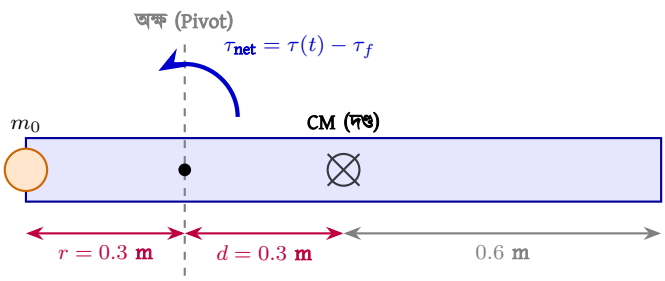


সমাধান (Solution)

ধাপ ১: ব্যবস্থার মোট জড়তার ভ্রামক (I) নির্ণয়

দণ্ডের জড়তার ভ্রামক (I_{rod}): দণ্ডটির ভরকেন্দ্র (Center of Mass, CM) তার এক প্রান্ত থেকে 0.6 m দূরে অবস্থিত। ঘূর্ণন অক্ষটি এক প্রান্ত থেকে 0.3 m দূরে থাকায়, ভরকেন্দ্র থেকে অক্ষের লম্ব দূরত্ব:

$$d = 0.6 \text{ m} - 0.3 \text{ m} = 0.3 \text{ m}$$



সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য (Parallel Axis Theorem) প্রয়োগ করে পাই:

$$I_{\text{rod}} = I_{\text{cm}} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

$$I_{\text{rod}} = \left(\frac{1}{12} \times 2 \times (1.2)^2\right) + \left(2 \times (0.3)^2\right)$$

$$I_{\text{rod}} = 0.24 + 0.18 = 0.42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

বিন্দু ভরের জড়তার ভ্রামক (I_{mass}): যেহেতু $m_0 = 2$ kg বিন্দু ভরটি অক্ষ থেকে $r = 0.3$ m দূরত্বে (কাছাকাছি প্রান্তে) অবস্থিত:

$$I_{\text{mass}} = m_0 r^2 = 2 \times (0.3)^2 = 0.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ব্যবস্থার মোট জড়তার ভ্রামক (I):

$$I = I_{\text{rod}} + I_{\text{mass}} = 0.42 + 0.18 = \mathbf{0.60}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{\mathbf{2}}$$

ধাপ ২: ঘূর্ণন শুরুর সময়সীমা (Start Time) নির্ধারণ

ঘূর্ণন শুরু করার জন্য প্রযুক্ত পরিবর্তনশীল টর্ককে অবশ্যই প্রতিরোধী ঘর্ষণ টর্কের চেয়ে বেশি হতে হবে ($\tau(t) > \tau_f$):

$$3.6t > 1.8 \implies t > 0.5\ \text{s}$$

অতএব, ব্যবস্থাটি প্রথম 0.5 s সময় পর্যন্ত সম্পূর্ণ স্থির থাকবে এবং ঠিক $t_s = 0.5$ s মুহূর্তে ঘূর্ণন শুরু করবে।

ধাপ ৩: কৌণিক বেগ (ω) নির্ণয়

$t \geq 0.5$ s-এর জন্য ব্যবস্থার ওপর নিট কার্যকরী টর্ক:

$$\tau_{\text{net}}(t) = \tau(t) - \tau_f = 3.6t - 1.8\ \text{N} \cdot \text{m}$$

নিউটনের আবর্তন গতিসূত্র ($\tau = I\alpha$) অনুসারে কৌণিক ত্বরণ (α):

$$\alpha(t) = \frac{\tau_{\text{net}}(t)}{I} = \frac{3.6t - 1.8}{0.60} = 6t - 3\ \text{rad/s}^2$$

কৌণিক ত্বরণকে সমাকলন (integrate) করে $t = 2.5$ s মুহূর্তে কৌণিক বেগ (ω) বের করি:

$$\omega = \int_{t_s}^{t} \alpha(t')dt' = \int_{0.5}^{2.5} (6t' - 3)dt'$$

$$\omega = \left[3(t')^2 - 3t'\right]_{0.5}^{2.5}$$

$$\omega = \left(3(2.5)^2 - 3(2.5)\right) - \left(3(0.5)^2 - 3(0.5)\right)$$

$$\omega = (18.75 - 7.5) - (0.75 - 1.5)$$

$$\omega = 11.25 - (-0.75) = 11.25 + 0.75 = \mathbf{12.0}\ \text{rad/s}$$

ধাপ ৪: আবর্তন গতিশক্তি (Rotational KE) নির্ণয়

$t = 2.5$ s মুহূর্তে ব্যবস্থার মোট আবর্তন গতিশক্তি:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.60 \times (12.0)^2 = 0.30 \times 144 = \mathbf{43.2}\ \text{J}$$

চূড়ান্ত উত্তর:
$t = 2.5$ s মুহূর্তে দণ্ডটির আবর্তনজনিত গতিশক্তি হবে **43.2** J।

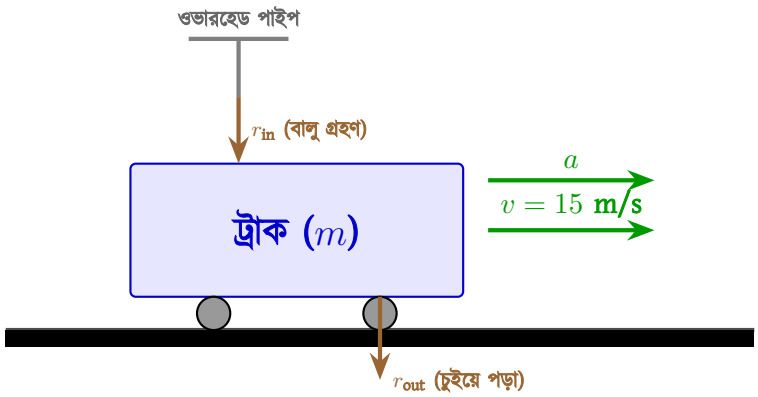
প্রশ্ন (Question) 17

$t = 0$ সেকেন্ডে স্থিরাবস্থা থেকে চলা একটি পরিবর্তনশীল ভরের ট্রাকের গতিশীল অবস্থার প্যারামিটারসমূহ নিচে দেওয়া হলো:

1. **বালু বর্জনের হার (Leakage rate):** $r_{\text{out}}(a) = 2a^2$ kg/s (খাড়া নিচের দিকে চুইয়ে পড়ে, ট্রাকের সাপেক্ষে আপেক্ষিক অনুভূমিক বেগ শূন্য)।
2. **বালু গ্রহণের হার (Loading rate):** $r_{\text{in}}(t) = 1.2t^2$ kg/s (স্থির ওভারহেড পাইপ থেকে খাড়া নিচে পড়ে, অনুভূমিক আদি বেগ শূন্য)।
3. **তাৎক্ষণিক ত্বরণ (Acceleration):** $a(m) = \frac{32000}{m}$ m/s^2।

ঠিক $t = 10$ s মুহূর্তে ট্রাকটির তাৎক্ষণিক ভর $m = 4000$ kg এবং গতিবেগ $v = 15$ m/s হলে, ওই মুহূর্তে ইঞ্জিনের ওপর প্রযুক্ত নিট অনুভূমিক বাহ্যিক বল (F_{ext}) নির্ণয় করো।

A variable-mass truck starts from rest at $t = 0$. Its dynamic parameters are as follows: Sand Leakage Rate: $r_{out}(a) = 2a^2$ kg/s (leaks vertically downward, with zero relative horizontal velocity to the truck). Sand Loading Rate: $r_{in}(t) = 1.2t^2$ kg/s (falls from a stationary overhead pipe with zero initial horizontal ground velocity). Instantaneous Acceleration: $a(m) = \frac{32000}{m}$ m/s^2. At $t = 10$ s, the truck has a mass $m = 4000$ kg and velocity $v = 15$ m/s. Find the horizontal external force (F_{ext}) acting on the truck at this instant.



সমাধান (Solution)

ধাপ ১: প্রদত্ত মুহূর্তের নির্দিষ্ট মানসমূহ হিসাবকরণ

সময় $t = 10$ s মুহূর্তে:

- তাৎক্ষণিক ভর, $m = 4000$ kg
- তাৎক্ষণিক বেগ, $v = 15$ m/s
- তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $a = \frac{32000}{m} = \frac{32000}{4000} = \mathbf{8.0}$ m/s^2

এই নির্দিষ্ট মুহূর্তে বালু গ্রহণ ও বর্জনের হার:

- বালু গ্রহণের হার (Inflow rate): $r_{\text{in}} = 1.2t^2 = 1.2 \times (10)^2 = \mathbf{120}$ kg/s
- বালু বর্জনের হার (Outflow rate): $r_{\text{out}} = 2a^2 = 2 \times (8.0)^2 = 2 \times 64 = \mathbf{128}$ kg/s

ধাপ ২: আপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity) বিশ্লেষণ

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী পরিবর্তনশীল ভরের গতির সমীকরণটি হলো:

$$F_{\text{ext}} + F_{\text{thrust}} = m \cdot a$$

যেখানে নিট থ্রাস্ট বল (Net Thrust Force):

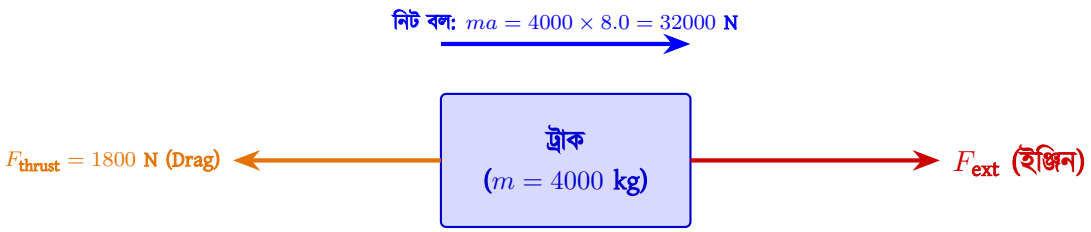
$$F_{\text{thrust}} = \vec{v}_{\text{rel, in}} \cdot r_{\text{in}} - \vec{v}_{\text{rel, out}} \cdot r_{\text{out}}$$

- **আগত বালুর আপেক্ষিক বেগ ($\vec{v}_{\text{rel, in}}$):** যেহেতু ওভারহেড পাইপের বালুর অনুভূমিক বেগ শূন্য এবং ট্রাকটি ডান দিকে $v = 15$ m/s বেগে চলছে, তাই ট্রাকের সাপেক্ষে আগত বালুর আপেক্ষিক অনুভূমিক বেগ:

$$\vec{v}_{\text{rel, in}} = 0 - v = -15 \text{ m/s}$$

- **চুইয়ে পড়া বালুর আপেক্ষিক বেগ ($\vec{v}_{\text{rel, out}}$):** যেহেতু চুইয়ে পড়া বালুটি ট্রাকের নিচ থেকে খাড়া নিচে পড়ে যায়, তাই অনুভূমিকভাবে এর কোনো আপেক্ষিক বেগ নেই:

$$\vec{v}_{\text{rel, out}} = 0$$



ধাপ ৩: থ্রাস্ট বল (F_{thrust}) এবং বাহ্যিক বল (F_{ext}) হিসাব

থ্রাস্ট বলের মান:

$$F_{\text{thrust}} = (-15) \times 120 - (0) \times 128$$

$$F_{\text{thrust}} = -1800 - 0 = \mathbf{-1800}\ \text{N}$$

এই ঋণাত্মক মান নির্দেশ করে যে, বালু গ্রহণের ফলে সৃষ্ট থ্রাস্ট বল গতির বিরুদ্ধে কাজ করছে (Drag Force)।

গতির সমীকরণ প্রয়োগ করে বাহ্যিক বল নির্ণয়:

$$F_{\text{ext}} + F_{\text{thrust}} = m \cdot a$$

$$F_{\text{ext}} - 1800 = 4000 \times 8.0$$

$$F_{\text{ext}} - 1800 = 32000$$

$$F_{\text{ext}} = 32000 + 1800 = \mathbf{33800}\ \text{N}$$

চূড়ান্ত উত্তর:

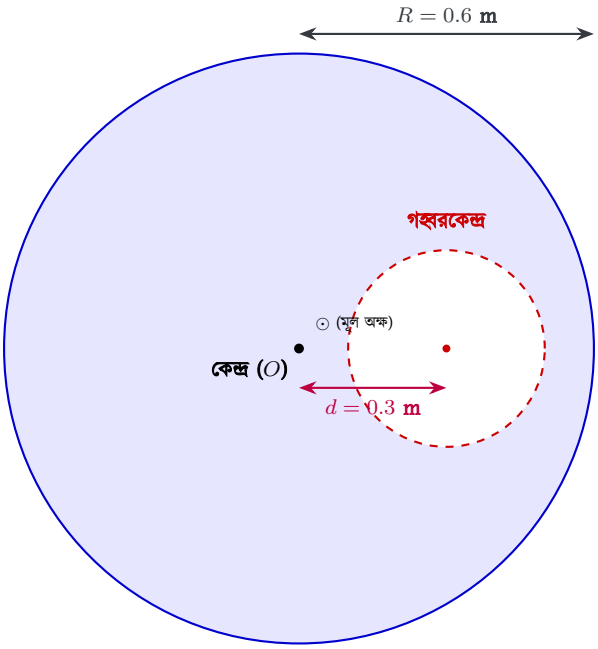
উক্ত নির্দিষ্ট মুহূর্তে ট্রাকটির ওপর প্রযুক্ত নিট বাহ্যিক অনুভূমিক বলের মান হবে **33800** N (বা **33.8** kN)।

প্রশ্ন (Question) 18

$R = 0.6$ m ব্যাসার্ধের একটি সুষম বৃত্তাকার পাত (disc) থেকে $r = 0.2$ m ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার অংশ কেটে গহ্বর (hole) তৈরি করা হলো। কেটে নেওয়া বৃত্তাকার গহ্বরটির কেন্দ্র মূল বৃত্তাকার পাতের কেন্দ্র থেকে $d = 0.3$ m দূরে অবস্থিত।

গহ্বর তৈরির পর বৃত্তাকার পাতের অবশিষ্ট অংশের ভর 4.0 kg হলে, মূল বৃত্তাকার পাতের কেন্দ্রগামী এবং তলের সাথে লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে অবশিষ্ট পাতের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করো।

A circular hole of radius $r = 0.2$ m is cut out of a uniform circular disc of radius $R = 0.6$ m. The center of the hole is located at a distance of $d = 0.3$ m from the center of the original disc. If the mass of the remaining portion of the disc is 4.0 kg, calculate the moment of inertia of the remaining portion about an axis passing through the center of the original disc and perpendicular to its plane.



সমাধান (Solution)

সুপারপজিশন নীতি (Principle of Superposition) বা ঋণাত্মক ভরের ধারণা ব্যবহার করে অবশিষ্ট অংশের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করা যায়:

$$I_{\text{remaining}} = I_{\text{original}} - I_{\text{hole}}$$

ধাপ ১: ক্ষেত্রফল ও ভর বণ্টন নির্ণয়

- মূল পাতের ক্ষেত্রফল: $A_{\text{orig}} = \pi R^2 = \pi(0.6)^2 = 0.36\pi \text{ m}^2$
- কেটে নেওয়া গহ্বরের ক্ষেত্রফল: $A_{\text{hole}} = \pi r^2 = \pi(0.2)^2 = 0.04\pi \text{ m}^2$
- অবশিষ্ট অংশের ক্ষেত্রফল: $A_{\text{rem}} = A_{\text{orig}} - A_{\text{hole}} = 0.36\pi - 0.04\pi = 0.32\pi \text{ m}^2$

যেহেতু পাতটি সুষম, তাই প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ভর (σ):

$$\sigma = \frac{\text{অবশিষ্ট ভর}}{A_{\text{rem}}} = \frac{4.0}{0.32\pi} = \frac{12.5}{\pi} \text{ kg/m}^2$$

- মূল সম্পূর্ণ পাতের ভর (M_{orig}):

$$M_{\text{orig}} = \sigma \cdot A_{\text{orig}} = \frac{12.5}{\pi} \times 0.36\pi = 4.5 \text{ kg}$$

- কেটে নেওয়া অংশের ভর (M_{hole}):

$$M_{\text{hole}} = \sigma \cdot A_{\text{hole}} = \frac{12.5}{\pi} \times 0.04\pi = 0.5 \text{ kg}$$

সম্পূর্ণ পাত ($M_{\text{orig}} = 4.5$ kg)	$-$	কেটে নেওয়া অংশ ($M_{\text{hole}} = 0.5$ kg)	$=$	অবশিষ্ট পাত (4.0 kg)

ধাপ ২: জ্যামিতিক অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকসমূহ হিসাবকরণ

- **মূল পাতের জড়তার ভ্রামক (I_{original}):**

$$I_{\text{original}} = \frac{1}{2}M_{\text{orig}}R^2 = \frac{1}{2} \times 4.5 \times (0.6)^2 = 0.5 \times 4.5 \times 0.36 = 0.81 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- **কেটে নেওয়া অংশের নিজস্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ($I_{\text{hole, own}}$):**

$$I_{\text{hole, own}} = \frac{1}{2}M_{\text{hole}}r^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (0.2)^2 = 0.5 \times 0.5 \times 0.04 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- **সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য ব্যবহার করে মূল কেন্দ্রের সাপেক্ষে গহ্বরের জড়তার ভ্রামক (I_{hole}):**

$$I_{\text{hole}} = I_{\text{hole, own}} + M_{\text{hole}}d^2 = 0.01 + 0.5 \times (0.3)^2 = 0.01 + 0.5 \times 0.09 = 0.01 + 0.045 = 0.055 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ধাপ ৩: অবশিষ্ট পাতের জড়তার ভ্রামক ($I_{\text{remaining}}$)

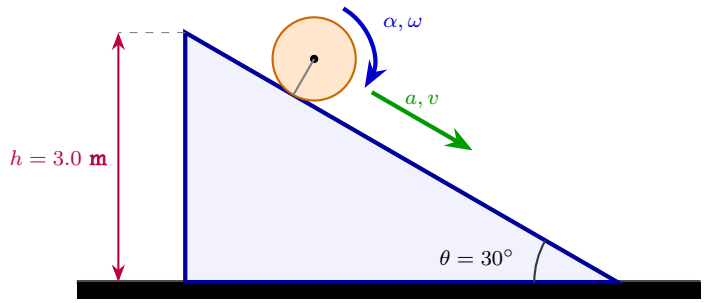
$$I_{\text{remaining}} = I_{\text{original}} - I_{\text{hole}} = 0.81 - 0.055 = \mathbf{0.755} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

চূড়ান্ত উত্তর:
মূল কেন্দ্রের সাপেক্ষে বৃত্তাকার পাতের অবশিষ্ট অংশের জড়তার ভ্রামক হলো $\mathbf{0.755}$ kg $\cdot$ m^2।

প্রশ্ন 19

$M = 2.0$ kg ভর এবং $R = 0.1$ m ব্যাসার্ধের একটি নিরেট সিলিন্ডার (solid cylinder) $\theta = 30°$ কোণে আনত তলের চূড়া থেকে স্থির অবস্থা হতে নিচের দিকে না পিছলে বিশুদ্ধ গড়ানে গতিতে (rolling without slipping) গড়িয়ে পড়তে শুরু করে। আনত তলের খাড়া উচ্চতা $h = 3.0$ m হলে, সিলিন্ডারটির নিচের দিকে নামার রৈখিক ত্বরণ (a) এবং আনত তলের একদম নিচে পৌঁছানোর মুহূর্তে এর ভরকেন্দ্রের রৈখিক বেগ (v) নির্ণয় করো। [Take $g = 9.8$ m/s^2]

A uniform solid cylinder of mass $M = 2.0$ kg and radius $R = 0.1$ m rolls down from rest from the top of an inclined plane of angle $\theta = 30°$ without slipping. If the vertical height of the incline is $h = 3.0$ m, calculate the linear acceleration (a) of the cylinder down the slope and the linear speed (v) of its center of mass when it reaches the bottom. [Take $g = 9.8$ m/s^2]



সমাধান (Solution)

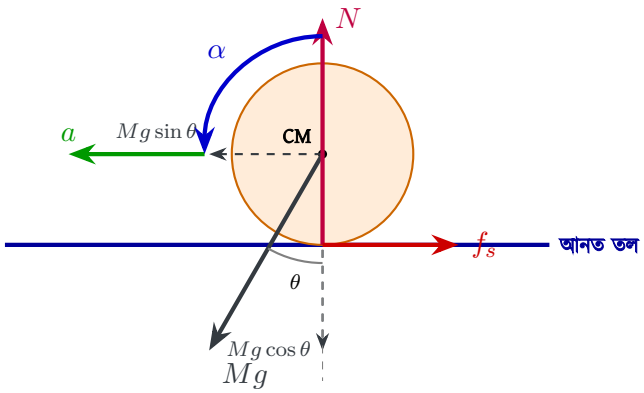
ধাপ ১: গড়ানে গতির রৈখিক ত্বরণ (a) নির্ণয়

বিশুদ্ধ গড়ানে গতির (rolling without slipping) ক্ষেত্রে আনত তল বরাবর রৈখিক ত্বরণের সাধারণ সমীকরণ হলো:

$$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I_{\text{cm}}}{MR^2}}$$

নিরেট সিলিন্ডারের জন্য ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$। সুতরাং, $\frac{I_{\text{cm}}}{MR^2} = 0.5$। মানগুলো বসিয়ে পাই:

$$a = \frac{9.8 \times \sin 30°}{1 + 0.5} = \frac{9.8 \times 0.5}{1.5} = \frac{4.9}{1.5} \approx \mathbf{3.27}\ \text{m/s}^2$$



ধাপ ২: পাদদেশে রৈখিক বেগ (v) নির্ণয় (শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি)

চূড়ায় থাকা অবস্থায় সিলিন্ডারের মোট যান্ত্রিক শক্তি ছিল কেবল অভিকর্ষজ বিভব শক্তি। নিচে পৌঁছানোর পর তা রৈখিক ও ঘূর্ণন গতিশক্তির সমষ্টিতে রূপান্তরিত হয়।

$$E_i = E_f$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$$

না পিছলে গড়িয়ে চলার শর্তানুসারে, $\omega = \frac{v}{R}$। মান বসিয়ে পাই:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

প্রদত্ত মানগুলো ($g = 9.8\ \text{m/s}^2, h = 3.0\ \text{m}$) সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \times 9.8 \times 3.0} = \sqrt{4 \times 9.8} = \sqrt{39.2} \approx \mathbf{6.26}\ \text{m/s}$$

চূড়ান্ত উত্তর:

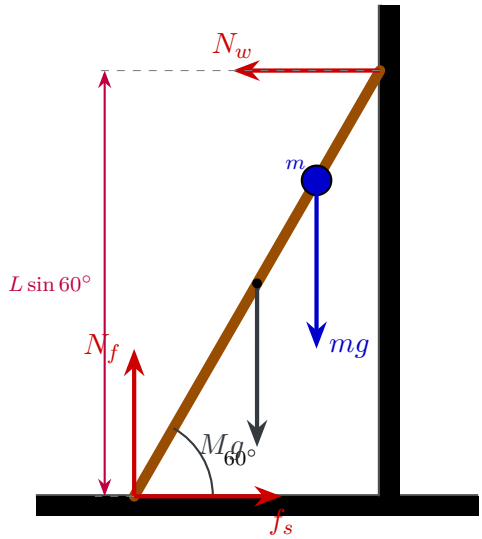
সিলিন্ডারটির নিচের দিকে নামার রৈখিক ত্বরণ প্রায় $\mathbf{3.27}\ \text{m/s}^2$ এবং নিচে পৌঁছানোর মুহূর্তের বেগ প্রায় $\mathbf{6.26}\ \text{m/s}$।

প্রশ্ন(Question)20

$M = 20$ kg ভর এবং $L = 5.0$ m দৈর্ঘ্যের একটি সুষম মই (ladder) একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে হেলান দিয়ে রাখা আছে, যাতে মইটি অনুভূমিক মেঝের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। মই ও মেঝের মধ্যবর্তী স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_s = 0.4$। $m = 80$ kg ভরের একজন ক্রীড়াবিদ মইটি বেয়ে ওপরের দিকে উঠতে শুরু করলেন।

মইটি পিছলে পড়ে যাওয়ার ঠিক পূর্ব মুহূর্তে (on the verge of slipping) তিনি মই বরাবর সর্বোচ্চ কত দূর (d) আরোহণ করতে পারবেন তা নির্ণয় করো। [Take $g = 9.8$ m/s^2]

A uniform ladder of mass $M = 20$ kg and length $L = 5.0$ m leans against a smooth vertical wall, making an angle of $60°$ with the horizontal floor. The coefficient of static friction between the ladder and the floor is $\mu_s = 0.4$. An athlete of mass $m = 80$ kg starts climbing the ladder. Calculate the maximum distance d along the ladder that the athlete can climb before the ladder begins to slip. [Take $g = 9.8$ m/s^2]



সমাধান (Solution)

মইয়ের নিচের প্রান্তে মেঝের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া N_f এবং ঘর্ষণ বল f_s ক্রিয়াশীল। ওপরের মসৃণ দেওয়াল মইটিকে কেবল একটি লম্ব প্রতিক্রিয়া বল N_w প্রদান করে।

ধাপ ১: বলের রৈখিক ভারসাম্য বিশ্লেষণ

- **উল্লম্ব বলের ভারসাম্য ($\Sigma F_y = 0$):**

$$N_f - Mg - mg = 0 \implies N_f = (M + m)g$$

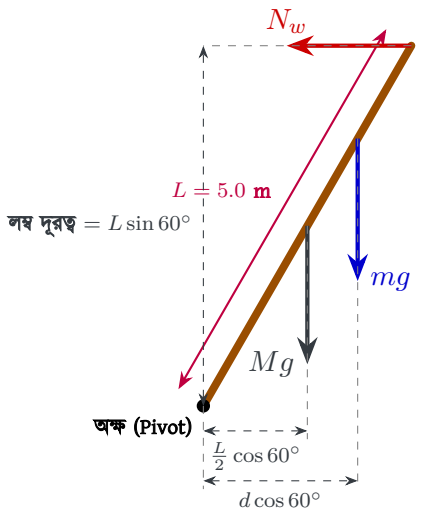
$$N_f = (20 + 80) \times 9.8 = \mathbf{980}\ \text{N}$$

- **সর্বোচ্চ ঘর্ষণ বল ($f_{s,\text{max}}$):** পিছলে যাওয়ার মুহূর্তে ঘর্ষণ বল তার সর্বোচ্চ সীমায় পৌঁছায়:

$$f_s = f_{s,\text{max}} = \mu_s N_f = 0.4 \times 980 = \mathbf{392}\ \text{N}$$

- **অনুভূমিক বলের ভারসাম্য ($\Sigma F_x = 0$):**

$$N_w - f_s = 0 \implies N_w = f_s = \mathbf{392}\ \text{N}$$



ধাপ ২: আবর্তন ভারসাম্য ও টর্কের সমীকরণ

মইটির নিচের প্রান্ত (মেঝের স্পর্শবিন্দু)-র সাপেক্ষে টর্কের সমষ্টি শূন্য হতে হবে ($\Sigma \tau_{\text{base}} = 0$):

- মইয়ের ওজনের টর্ক (মইয়ের মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়াশীল):

$$\tau_M = -Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos 60°$$

- আরোহণকারী ক্রীড়াবিদের ওজনের টর্ক (দূরত্ব d-তে ক্রিয়াশীল):

$$\tau_m = -mg(d)\cos 60°$$

- দেওয়ালের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বলের টর্ক:

$$\tau_W = +N_w L \sin 60°$$

সাম্যাবস্থার সমীকরণ:

$$N_w L \sin 60^\circ - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos 60^\circ - mgd\cos 60^\circ = 0$$

মানগুলো সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$392 \times 5.0 \times \sin 60^\circ - 20 \times 9.8 \times 2.5 \times \cos 60^\circ - 80 \times 9.8 \times d \times \cos 60^\circ = 0$$

$$1960 \times 0.8660 - 490 \times 0.5 - 784 \times d \times 0.5 = 0$$

$$1697.41 - 245 - 392d = 0$$

$$1452.41 = 392d \implies d = \frac{1452.41}{392} \approx \mathbf{3.71}\ \mathrm{m}$$

চূড়ান্ত উত্তর:
পিছলে পড়ার ঠিক পূর্ব মুহূর্তে ক্রীড়াবিদটি মই বরাবর সর্বোচ্চ প্রায় $\mathbf{3.71}$ m ওপরে উঠতে পারবেন।